

ВеданопедияСайт: <http://ve-poti.narod.ru/>.

Статья «Теория множеств»

2013-02-07

Теория множеств – собирательное название, употребляемое в современной математике для обозначения некоторой неоднородной группы способов мышления и представлений, различающихся внутри этой группы по своему происхождению, природе и ценности.

В том поле, что традиционно называется «теорией множеств», ВТ выделяет две кардинально различающиеся части, и обозначает их двумя различными терминами: [Квантуализм](#) и [Канторизм](#).

Квантуализм

Человеческое мышление с самых своих истоков оперирует различными множествами (см. статью [«Множество»](#)); уже люди каменного века выделяли многочисленные множества, например, такие как «мужчины», «женщины», «мамонты», «птицы» и т.д. С развитием мышления множества, которыми оперировал мозг, становились разнообразнее; всё чаще оперировали абстрактными множествами, т.е. множествами потенциальных продуктов мозговых программ. Но множества продолжали оставаться самым фундаментальным объектом в человеческом [витосе](#). Можно сказать, лишь чуточку поэтизируя ситуацию, что человеческий мозг представляет собой «процессор множеств».

Поэтому сам факт осознания фундаментальной роли множеств, факт выделения самого общего понятия «множество» и рассмотрения всех объектов мышления как множеств является вполне естественным, а такой подход – несомненно правильным.

Для обозначения этого подхода в русскоязычной литературе используется термин «теоретико-множественный» (подход и т.д.). Для вытеснения этого уродливого термина в ВТ в 1990-х годах был принят заменяющий термин «квантуальный» (от латинского слова, меняющегося по грамматическим родам так: «*quantus, quanta, quantum*» – и означающего «столько, сколько можно»; подразумевается, что само множество на латыни будет обозначаться этим словом). А сам подход, всё рассматривающий как множества, называется Квантуализмом.

Канторизм

Но в традиционной математической литературе всецело полезный и подлежащий одобрению квантуализм безнадежно смешан со лженаучным, построенным на логических ошибках, учением Георга Кантора о якобы существующих различных типах бесконечностей. Это учение, чтобы отграничить его от квантуализма, в ВТ названо «канторизмом».

В традиционной литературе все вопросы рассматриваются и везде говорится так, будто квантуализм и канторизм неразрывно связаны, будто это естественные части единого целого, называемого «теорией множеств». Это затрудняет формулировки отношения к теории множеств и, возможно, иногда порождает путаницу и недоразумения.

Нужно всегда помнить, что в т.н. «теории множеств» имеются две части, совершенно разные по качеству, значимости и полезности, – квантуализм и канторизм.

Первый из них – ценная вещь, которая широко и плодотворно используется. Когда кто-то говорит, что «теория множеств широко применяется...», то он на самом деле утверждает, что применяется квантуализм.

Вторая вещь представляет собой лженауку, нигде не применяется и применяться принципиально не может, кроме как для построения новых таких же лженаук. Никто не строит мостов и не запускает ракет, рассчитывая параметры моста и траекторию ракеты «трансфинитными числами».

Приложения

Приложение № 1. Введение в книгу Ф.А. Медведева

2013-02-07

В настоящем Приложении приводится «Введение» в книгу Федора Андреевича Медведева «Развитие теории множеств в XIX веке» (Издательство «Наука», Москва 1965, ответственный редактор доктор физико-математических наук А.П. Юшкевич). Это типичный пример безнадёжного смешения квантуализма и канторизма.

* * *

Введение

В истории математики было немного таких моментов, которые по своей общематематической и философской значимости сравнимы с революционным переворотом, совершенным созданием теории множеств. Он равнозначен факту осознания математики как дедуктивной науки в древней Греции, созданию в XVII–XVIII вв. классического математического анализа и построению неевклидовых геометрий в XIX столетии.

Основным понятием теории множеств является, несомненно, понятие актуальной бесконечности.¹ Фактически это понятие в той или иной форме, явно или неявно, ученые использовали с тех пор, как математика стала дедуктивной наукой. Но только в теории множеств оно стало объектом самостоятельного научного рассмотрения. И, как отметил видный специалист по теории множеств А.А. Френкель,

«завоевание актуальной бесконечности методами теории множеств можно рассматривать как расширение нашего научного горизонта, не меньшее по значению, чем коперниковская система в астрономии и теория относительности или даже квантовая теория в физике»^{2,3}.

¹ В.Э. 2013-02-07: Основным понятием теории множеств является всё-таки понятие множества. Бесконечные множества представляют собой потенциальные продукты бесконечно работающих (способных работать бесконечно) мозговых программ. Как продукты программ, к тому же всего лишь потенциальные, а не реальные, эти множества являются лишь потенциально бесконечными. В физическом мире актуальной бесконечности этих множеств нет, она не существует. Но человеческий витос путем бокоанализа программы, порождающей данное множество, легко создает номиналию данного (бесконечного) множества, в результате чего в платоновском мире появляется реалия актуально бесконечного множества. Это фактический процесс, происходящий в мозге того человека, который «начинает рассматривать множество как актуально бесконечное». «Признать» или «не признать» актуальную бесконечность – это на самом деле означает: допускать или не допускать в своем мышлении (т.е. в работе мозгового компьютера) этот процесс бокоанализа. Разумеется, нет никаких причин, заставляющих в данном случае отказываться от применения бокоанализа (широко применяемого мозгом в других, самых обычных повседневных ситуациях). Поэтому нет никаких причин «не признавать» актуальную бесконечность (существующую не в физическом мире, а в платоновском мире идей). Но при этом нужно понимать и помнить, КАК актуальная бесконечность возникает, откуда она появляется, и мыслить о ней нужно четко и логично, не совершая при этом логических ошибок (свойственных Кантору и кантористам). Когда Медведев выдвигает актуальную бесконечность в качестве основного понятия теории множеств, он на самом деле подразумевает, что она будет обладать теми свойствами, которые ей приписывает Кантор. Но на самом деле она такими свойствами НЕ обладает; эти «свойства» «получены» путем совершения логических ошибок. Но эти ошибки вовсе не состоят в принятии самого понятия актуальной бесконечности (как это стараются изобразить кантористы). Актуальная бесконечность – законна, а ошибки кантористов – это просто ошибки, не имеющие никакого отношения к бесконечности как актуальной бесконечности.

² А.А. Fraenkel. *Abstract set theory*. Amsterdam, 1953, p. 331.

³ В.Э. 2013-02-08: А это уже ерунда, высказанная в предположении, что канторизм основывается не на логических ошибках, а представляет собой действительное научное знание.

Во всяком случае можно сказать, что практически почти всё развитие математики первой половины XX столетия происходит под прямым или косвенным влиянием теории множеств.

«Теория множеств и ее ближайшие приложения не только образовали новый предмет математического исследования; значение теории множеств оказалось неизмеримо большим: она дала универсальный новый метод, быстро захвативший всю математику»⁴.

И хотя в настоящее время существует много методов и ряд новых отраслей математики, выходящих за пределы теоретико-множественных идей, тем не менее значение теории множеств остается очень большим.

Не говоря уже о таких математических дисциплинах, как теория функций действительного переменного, общая топология, функциональный анализ, непосредственно выраставших из теории множеств и на ее основе,⁵ можно указать и такие, как теория вероятностей и алгебра, которые во многом сложились еще до создания теории множеств, но под влиянием последней претерпели существенное изменение.

«Невозможен никакой компромисс в вопросе о взаимоотношении теории вероятностей с другими разделами математики. Теория вероятностей – это просто одна из ветвей теории меры, отличающаяся особым вниманием к некоторым специальным понятиям этой теории и своей особой областью приложений»⁶.

Столь же определенно говорится и об алгебре: «*В основе общей алгебры лежат понятия и методы теории множеств*»⁷.

Число таких высказываний высококвалифицированных специалистов можно значительно увеличить, но и приведенных достаточно для характеристики роли теории множеств в современной математике.

В связи со сказанным определенную настороженность вызывает то обстоятельство, что теория множеств XIX столетия нередко представляют творением одного человека. Так, в предисловии к собранию сочинений Г. Кантора Э. Цермело писал:

«В истории науки случается очень редко, чтобы целая научная дисциплина основополагающего значения была обязана творчеству единого лица. Это произошло с построенной Георгом Кантором теорией множеств – новой математической дисциплиной, основы которой были созданы на протяжении приблизительно 25 лет в ряде сочинений одного и того же исследователя; ...все более поздние исследования в этой области воспринимаются лишь как дополнительное развитие его основных мыслей»⁸.

Действительно ли, однако, дело обстоит так, что столь обширная и столь важная научная дисциплина является единоличным творением Кантора⁹? Из истории математики известно, насколько трудно иногда однозначно связать даже отдельные понятия или теоремы с именами тех или иных математиков. Как правило, подход к значительному математическому понятию является неоднозначным, разные математики подходят к нему по-разному, исходя иногда из самых разнообразных, на первый взгляд не связанных между собою, задач. *A priori* поэтому приведенные слова Цермело выглядят как явное преувеличение. В самом деле, как мы увидим впоследствии, они действительно не совсем соответствуют фактическому положению вещей. У Кантора были и предшественники и современники почти во всех вопросах разрабатываемой им теории. По разным причинам им не удалось получить таких серьезных результатов,¹⁰ каких

⁴ П.С. Александров. Предисловие к книге Ж. де Рама «Дифференцируемые многообразия». М., ИЛ, 1956, стр. 5.

⁵ В.Э. 2013-02-07: На основе квантуализма, разумеется, а не канторизма.

⁶ Д.Л. Дуб. *Вероятностные процессы*. М., ИЛ, 1956, стр. 7.

⁷ А.Г. Курош. *Лекции по общей алгебре*. М., Физматгиз, 1962, стр. 9.

⁸ G. Cantor. *Gesammelte Abhandlungen*. Berlin, 1932, S. III. Далее ссылка на эту работу приводится в виде: G. Cantor. *Ges. Abh.*

⁹ В.Э. 2013-02-07: Канторизм, конечно, был создан исключительно Георгом Кантором, и именно это имеет в виду Цермело. Но квантуализм применялся широко и до Кантора – что теперь и будет доказывать Медведев. Так что на самом деле тут никакого противоречия нет.

¹⁰ В.Э. 2013-02-07: То есть, они не построили такие воздушные замки, как Кантор.

добился Кантор, но всё же очень многое в теории множеств было сделано или до Кантора, или независимо от него.

Этим не умаляются заслуги Кантора в создании теории множеств. Его заслуги бесспорны, и об этом не раз придется говорить впоследствии. Отрицается просто возможность исторически незакономерного построения новой научной дисциплины без подготовленной для этого почвы и без участия большой группы ученых в ее разработке.

На протяжении XIX столетия в самых разнообразных отраслях математики вырастали теоретико-множественные идеи, и эти идеи более или менее сознательно начали разрабатывать многие ученые. И тот же Дедекин, если бы он уделил столько внимания самостоятельной разработке новой теории, добился бы, вероятно, не меньших результатов, нежели Кантор. Исторически так не случилось. Именно Кантор сумел разглядеть в возникающих в различных отраслях математики новых объектах – бесконечных множествах разных типов – самостоятельный, интересный и важный предмет исследования. Почувствовав значение возникающей математической дисциплины, он забросил свои исследования по теории чисел и теории функций, целиком посвятив себя разработке проблем, связанных с учением о множествах.

Истории теории множеств посвящено довольно много серьезных работ. Из них в первую очередь следует указать книгу В.Л. Некрасова «Строение и мера линейных точечных областей»¹¹, добрая половина которой (главы I и III) посвящена истории теории точечных множеств; затем цикл статей Ф. Журдэна под общим названием «Развитие теории трансфинитных чисел»¹², книгу Ж. Кавайе «Замечания о формировании абстрактной теории множеств»¹³. Богатейший историко-математический материал содержится в ряде работ А. Шёнфлиса, подытоженных в книге «Развитие теории множеств и ее применений»¹⁴. Очень много самых разнообразных исторических данных содержится в немецкой и французской энциклопедиях математических наук. Имеется также ряд статей, в которых рассмотрены отдельные вопросы истории теории множеств, и несколько статей, посвященных Георгу Кантору.

Тем не менее, история теории множеств далеко не исчерпана, да вряд ли будет исчерпана в ближайшее время. С последующим развитием науки этот поворотный момент выглядит по-новому. Так, например, становление математики как дедуктивной науки в древней Греции давно является объектом исследований историков математики. И тем не менее к этому вопросу возвращаются всё вновь и вновь, раскрывая новые важные стороны, не замеченные прежними исследователями. Можно думать, что и с вопросом становления теории множеств дело будет обстоять аналогичным образом.

В указанной литературе по истории теории множеств возникновение последней представляется как итог исследований по основаниям математики, главным образом исследований по обоснованию классического анализа и теории функций. Действительно, эти исследования явились важным источником теоретико-множественных идей и методов. Но не только они одни. На наш взгляд, в возникновении теории множеств в той или иной мере «повинны» все основные направления математики XIX столетия. Это относится и к теории чисел, и к проективной геометрии,¹⁵ и к алгебре и, как уже говорилось, к анализу и теории функций. И подобно тому, как после формирования теория множеств надолго стала основой для последующего развития математики в целом, так и ее создание явилось в некотором смысле итогом развития почти всей математики XIX столетия.

При нынешнем состоянии исследований по истории математики XIX столетия не представляется возможным доказать этот тезис во всем его объеме. Ниже сделана лишь одна из попыток в этом направлении.

В математике уже давно ощущалась недостаточность тех логических средств, которыми располагала традиционная формальная логика. Ее внутреннее развитие до XIX столетия происходило настолько незаметно, что с известным правом И. Кант мог сказать:

¹¹ Томск, 1907.

¹² Ph.E.B. Jourdain. *The development of the theory of transfinite numbers*. – Arch. Math. und Phys., 1906, 10, 254–281; 1909, 14, 289–311; 1910, 16, 21–43; 1914, 22, 1–21.

¹³ J. Cavarilès. *Remarques sur la formation de la théorie abstraite des ensembles*, I, II, Paris, 1938.

¹⁴ A. Schoenflies. *Entwicklung der Mengenlehre und ihrer Anwendungen*. Leipzig und Berlin, 1913.

¹⁵ На теорию чисел и проективную геометрию как важные источники теоретико-множественных представлений вкратце указал П.С. Александров в одной из лекций, прочитанных в июле 1962 г. на курсах усовершенствования учителей.

«Замечательно, что логика до сих пор не могла также сделать ни одного шага вперед (после Аристотеля. – *Ф.М.*) и, по-видимому, имеет совершенно замкнутый, законченный характер»¹⁶.

Однако его вывод о законченности характера¹⁷ формальной логики был исправлен, и в связи с этим в 1812 г. Гегель писал:

«Но если со времен Аристотеля логика не подверглась никаким изменениям, ...то мы отсюда должны сделать скорее тот вывод, что она тем больше нуждается в полной переработке, ибо двухтысячелетняя непрерывная работа духа должна была доставить более высокое сознание в своем мышлении...»¹⁸.

Эта двухтысячелетняя «работа духа», работа человеческой мысли, происходила в самых разнообразных областях сознательной деятельности человека и, быть может, наиболее интенсивно именно в области математики, вопреки мнению Гегеля о бедности логическим содержанием математических суждений и о непригодности использования в логике средств математики.¹⁹

В частности, в математике был разработан очень полезный язык формул, в который хорошо укладывались многие составные части математического мышления, и ход рассуждений в ряде случаев представлялся в виде формального преобразования некоторых исходных формул по определенным правилам. В первой половине XIX столетия, главным образом в алгебре, было уже отчетливо осознано то обстоятельство, что один и тот же формальный язык применим не только к конкретным объектам определенного рода²⁰ (например, к действительным числам), но к довольно широкому классу математических объектов различных родов (комплексным числам, векторам, кватернионам и т.д.). Наиболее характерной в этом отношении была, может быть, «Алгебра» Дж. Пикока.²¹ В первой ее части буквенное исчисление изложено при условии интерпретации букв только как действительных чисел. Во второй же части буквы и алгебраические действия над ними рассматриваются как чисто формальные символы и их преобразования по определенным правилам.

9. ¹⁶ Предисловие ко второму изданию «Критики чистого разума». Перевод Н. Лосского. Пг., 1915, стр.

¹⁷ В.Э.: Может быть, всё-таки «о законченном характере»?

¹⁸ Гегель. *Наука логики*. М., Соцэкгиз, 1937, стр. 30.

¹⁹ Гегель. *Наука логики*. М., Соцэкгиз, 1937, стр. 31–32.

²⁰ В.Э. 2013-02-08: Это крайне неточное выражение, показывающее, что Медведев плохо понимает сущность тех вещей, о которых он говорит. Что такое «язык применим»? В действительности дела здесь обстоят так. Человек способен выполнять арифметические действия над числами. Это означает, что в его мозге есть программа выполнения таких действий. Эта программа не врожденна и не дана ему раз и навсегда, а (по заготовкам, приобретенным, как правило, в школе) генерируется непосредственно перед каждым конкретным вычислением. Допустим, человеку нужно вычислить: $6,2 \cdot \pi^2 + 9,43 \cdot \pi + 7,86$. Назовем программу, по которой он это вычисляет, программой *A* (а алгоритм, на котором она построена, соответственно алгоритмом *A*). Но эта программа (по этому алгоритму) может вычислить не только значение выражения именно при этих числах, но также и при других числах (при другом [материале](#)). Алгебра начинается тогда, когда абстрактный, потенциальный материал программы обозначают буквами, например, материал программы *A* традиционно обозначают так: $ax^2 + bx + c$. Это выражение, в отличие от предыдущего, представляет собой ОБЩЕЕ описание материалов программы *A*. Если хотят найти, при каких значениях *x* программа *A* даст результат 3, то описание пополняют так: $ax^2 + bx + c = 3$. Мы со школы знаем, что 3 «можно перенести на другую сторону уравнения» и вычесть из *c*, и знаем также о других операциях, которые можно проделывать над уравнениями. Но чтобы выполнить эти операции, нам опять нужна программа. Однако это не та же программа *A*, а другая программа *B*, оперирующая уже не числами, а символами уравнения. Если же в первом выражении мы хотим оперировать не действительными числами, а комплексными, то вместо программы *A* нам нужна будет несколько другая программа *A'* (так как действия над комплексными числами определены несколько иначе). Однако мы можем убедиться, что программа *B* остается пригодной и тогда, когда уравнение описывает не программу *A*, а программу *A'*. Процесс установления этого убеждения есть процесс определенного математического исследования, а результат – определенное математическое знание. На самом деле здесь исследуются некоторые программы мозга и взаимосвязи между их материалами и продуктами. Вот это в действительности скрывается за туманными словами Медведева: «один и тот же формальный язык применим не только к конкретным объектам определенного рода...».

²¹ G. Peacock. *Arithmetical algebra*. Cambridge, 1842; *Symbolical algebra*. Cambridge, 1843.

«Вместе с развитием алгебры не могла не поразить аналогия между правилами формальной логики и правилами алгебры, применяемыми в том и в другом случаях к неконкретизируемым далее объектам (предложениям или числам)»²².

И с середины XIX столетия, когда эта аналогия была осознана, начала создаваться математическая логика, разработка которой связана с именами Буля, Де Моргана, Девонса, Пирса, Фреге, Пеано, Шрёдера и ряда других математиков. Логические связи между суждениями и понятиями были выражены в математических формулах, а получение логических следствий предстало как формальное преобразование исходных формул по фиксированным правилам. Такое применение математического формализма позволило существенно раздвинуть рамки традиционной формальной логики.

Однако исследования по математической логике на первых порах производились вне связи с основными направлениями чисто математических исследований. Многие математики о них, как правило, просто не знали или же не осознавали их значение. Между тем потребность в применении логики и расширении ее средств была столь настоятельной, что математики вынуждены были прийти к логике еще с одной стороны. В разработанном ими учении о множествах они создали аппарат, оказавшийся содержательной теорией значительной части математической логики.

Этот второй подход математиков к логике был в некотором смысле противоположным тому, каким они шли к математической логике. Если к последней приводил путь использования в логике языка формул, то к теории множеств математики шли, скорее отказываясь от этого языка.

Одно из основных отличий математики XVIII в. от математики XIX в. заключается в следующем:

«...Будучи по существу методом, а в своих высших частях (дифференциальные уравнения) часто и собранием разрозненных методов решения задач, поставленных естествознанием, математика XVIII века естественно имела калькулятивный, вычислительный и формальный (алгоритмический) характер»²³.

Этот характер математики считался самими математиками как раз тем свойством, которое отличает ее от других наук. Там, где приходилось встречаться с недостаточностью традиционных вычислительных алгоритмов, где требовалось применить более общие способы рассуждений, там не желали видеть математической проблемы.

Показательна в этом отношении характеристика Эйлера топологической задачи о кенигсбергских мостах. Он сразу же осознал, что она не может быть решена обычными методами геометрии, алгебры или комбинаторики, решил ее,²⁴ но, сообщая свое решение Эдеру, писал:

«Это решение, по-видимому, имеет мало отношения к математике, и мне непонятно, почему следует скорее от математика ожидать этого решения, нежели от какого-нибудь другого человека, ибо это решение подкрепляется одним только рассуждением, и нет необходимости привлекать для нахождения этого решения какие-либо законы, свойственные математике»²⁵.

Но, как отметил еще Галуа,

«начиная с Эйлера, вычисления становятся всё более и более необходимыми и вместе с тем всё более и более трудными, по мере того, как их начинают применять ко всё более и более возвышенным разделам науки. В начале нашего века алгоритмы достигли такой степени сложности, что если бы современные математики не придавали своим исследованиям ту стройность, при которой можно быстро, с одного взгляда охватить значительное число операций, всякое движение вперед стало бы невозможным»²⁶.

²² N. Bourbaki. *Éléments d'histoire des mathématiques*. Paris, 1960, p. 15. (Здесь цитируется в нашем переводе; русский перев. см. Н. Бурбаки. *Очерки по истории математики*. М., ИЛ, 1963, стр. 14).

²³ П.С. Александров. *Русская математика XIX и XX вв. и ее влияние на мировую науку*. Ученые записки МГУ, 1947, 1, вып. 91, стр. 4.

²⁴ Л. Эйлер. *Письма к ученым*. М.–Л. Изд-во АН СССР, 1963, стр. 153.

²⁵ Там же, стр. 339.

²⁶ Цит. по кн.: А. Дальма. *Эварист Галуа – революционер и математик*. М., Физматгиз, 1960, стр. 144–145.

И эта невозможность успешного продвижения вперед в решении всё усложняющихся математических задач путем использования прежних методов отчетливо осознается наиболее выдающимися математиками XIX столетия. Начинают разрабатываться такие общие понятия, как группа, поле, кольцо, структура в алгебре, функция и предел в анализе. И, наконец, создается совокупность чрезвычайно общих понятий теории множеств. Вычисления в значительной мере заменяются рассуждениями.

Математика в своем последовательном развитии поднималась с одной ступени на другую по лестнице возрастающей абстрактности мышления. Но сколь бы ни была высокой степень абстрактности математических понятий, она не достигала уровня абстрактности, свойственного классической аристотелевской логике.

Положение коренным образом изменилось с созданием абстрактной теории множеств. Понятия последней достигли такой степени общности, что они или сравнивались по общности с понятием классической логики, или даже вышли за пределы абстрактности традиционных логических понятий. Теория множеств в значительной своей части стала математической логикой, выраженной на другом, содержательном языке.²⁷

Тесное переплетение математической логики и теории множеств произошло уже в XX столетии. Рассмотрение этого вопроса выходит за рамки настоящего исследования. Однако и в XIX в. связи теории множеств и математической логики достаточно ощутимы, и нам не раз придется отмечать их.

Вследствие того, что математика в теории множеств доросла до логики, возникла ожесточенная идеологическая борьба вокруг нового раздела математики. Логические исследования теснее, чем какие-либо другие, связаны с общефилософским мировоззрением ученого, поэтому расхождения во взглядах на предмет математики в целом и на предмет теории множеств в частности приняли более обнаженную форму. Однако всё это отчетливо выразилось опять-таки в XX столетии; в XIX же можно обнаружить лишь зарождение тенденций этой идеологической борьбы. Тогда происходило лишь становление новой научной дисциплины, с трудом пробивавшей себе дорогу среди тесно переплетенных ветвей мощного дерева математических наук, и далеко не все видели перспективы этого становления.

Вырастая во многом из потребностей более строгого обоснования различного рода рассуждений, широко применявшихся в математике, теория множеств после ее создания (а иногда в процессе этого создания) стала, в свою очередь, применяться для обоснования различных разделов математики. Но не успела теория множеств сформироваться в качестве самостоятельной научной дисциплины, едва начали осознавать необходимость ее в вопросах обоснования математики, как разные исследователи, начиная с самого Кантора, обнаружили внутри этой теории ряд серьезных парадоксов. Теория множеств, предназначавшаяся было для более строгого обоснования математики в целом, сама оказалась лишенной основ.

«Надо согласиться, что состояние, в котором мы находимся сейчас в отношении парадоксов, на продолжительное время невыносимо. Подумайте: в математике – этом образце достоверности и истинности – образование понятий и ход умозаключений, как их всякий изучает, преподает и применяет, приводят к нелепости. Где же искать надежность и истинность, если даже само математическое мышление дает осечку?»²⁸

С тех пор, как был исторгнут этот крик души крупнейшего математика первой половины XX столетия, прошло почти сорок лет. Однако положение с парадоксами теории множеств ничуть не изменилось, несмотря на предпринятые усилия по их устранению. По-прежнему они довлеют над сознанием математиков, их переписывают из книги в книгу, из статьи в статью, но пока не сделано каких-либо существенных шагов к освобождению от них математического мышления.

²⁷ В.Э. 2013-02-08: И логика, и теория множеств (и вся математика в целом) изучает мозговые программы (не все, но определенного рода), точнее: взаимосвязи между их материалами и продуктами, закономерности в этих материалах и продуктах. Поэтому граница между «логикой» и «теорией множеств» крайне условна, на самом деле ее нет. Их разделение – это только историческая традиция, а эта традиция основывается на слабом понимании сущности дела.

²⁸ D. Hilbert. *Über das Unendliche*. – Math. Ann., 1925, 95, 181–190. Русский перевод в кн.: Д. Гильберт. *Основания геометрии*. М. – Л., ОГИЗ ГИТТЛ, 1948, стр. 349.

Приведенные слова Гильберта относятся не только к парадоксам теории множеств, но и к ряду широко употребляющихся в ней способов рассуждений, вроде математических доказательств с использованием аксиомы Цермело, закона исключенного третьего, совокупности всех трансфинитных чисел второго числового класса, диагонального метода.

Фактически такого типа рассуждения, как правило, сложились в математике задолго до того, как теория множеств начала создаваться в качестве самостоятельной научной дисциплины. Ими широко пользовались в самых разнообразных разделах математики, не формулируя их в явном виде, и никто не возражал против их употребления. Но тогда, когда в теории множеств им был придан тот характер общности, каким вообще обладает эта теория, когда вследствие этой общности они приняли отчетливо выраженную форму, тотчас же возникли многочисленные возражения. Мнения математиков разделились. Одни категорически выступали против таких типов рассуждений, другие высказывались за безусловное их признание, третьи колебались в ту или иную сторону.

Особенно наглядно это проявилось в отношении аксиомы Цермело. Формулировка ее чрезвычайно проста: если имеется некоторое семейство непустых множеств, то можно рассматривать множество, элементами которого будут выбранные по одному элементу множеств заданного семейства. Вместе с тем, основываясь на ней, можно получить математические результаты довольно странного характера. Как показали С. Банах и А. Тарский, сферу радиуса R можно разбить на конечное число таких неперекрывающихся частей, что, перемещая последние как твердые тела и прикладывая их друг к другу соответствующим образом, можно получить новую сферу радиуса $2R$, причем не теряется ни одной точки первой сферы и не вводится новых точек^{29, 30}.

В явном виде эта аксиома была сформулирована только в 1904 г.³¹ Фактически же ею широко пользовались на протяжении всего XIX столетия.³² Даже возражения против использования этой аксиомы были высказаны еще до ее явной формулировки.³³ После опубликования работы Цермело возникла довольно серьезная полемика между Ж. Адамаром, Э. Борелем, Р. Бэром и А. Лебегом,³⁴ в частности о правомочности аксиомы выбора. С тех пор вопрос этот неоднократно обсуждался, но до сегодняшнего дня единого мнения не существует.

Несмотря на возражения многих математиков против использования рассуждений, связанных с аксиомой Цермело, она и до сих пор находит себе широчайшее применение в практике математических исследований.

«Вопрос о логических основах этой аксиомы и о законности ее использования принадлежит к числу самых трудных и спорных вопросов обоснования теории множеств. Мы не могли бы, однако, обойтись без аксиомы выбора»^{35, 36}.

²⁹ Н.Н. Лузин. Собр. соч., т. II. М., Изд-во АН СССР, 1958, стр. 518.

³⁰ **В.Э. 2013-02-02:** Э-э-э, боже мой! Я уже 40 лет про это слышу... Покажите мне, как вы это делаете, а я покажу вам, где у вас логическая ошибка. Меня не проведешь!

³¹ E. Zermelo. *Beweis, daß jede Menge wohlgeordnet werden kann.* – Math. Ann., 1904, 59, 514–516.

³² Об использовании аксиомы Цермело в анализе и теории множеств см.: В.К. Серпинский. *Аксиома Цермело и ее роль в теории множеств и в анализе.* – Матем. сб., 1924, 31, стр. 94–128. Многочисленные примеры применения этой аксиомы в теории чисел и в алгебре будут указаны далее.

³³ G. Peano. *Démonstration de l'intégrabilité des équations différentielles ordinaires.* – Math. Ann., 1890, 37, 210.

³⁴ *Cinq lettres sur la théorie des ensembles.* – В кн.: E. Borel. *Leçons sur la théorie des fonctions.* Note IV. 2e éd. Paris, 1914, p. 150.

³⁵ А.Г. Курош. *Лекции по общей алгебре.* М., Физматгиз, 1962, стр. 11.

³⁶ **В.Э. 2013-02-08:** Сама постановка вопроса нечеткая, неплодотворная и порождает проблемы. Не надо вообще никаких аксиом: ни аксиомы выбора, ни других аксиом. Просто отдайте, наконец, себе отчет в том, ЧТО, собственно, вы изучаете, а именно: что под видом «множеств» вы изучаете продукты мозговых программ, и смотрите на этот предмет именно как на программы – учитывая, КАК они могут взаимодействовать. Просто перестаньте жить в своем вечном тумане и составьте наконец ясную картину о ситуации! «Аксиома выбора» – «формулировка ее чрезвычайно проста: если имеется некоторое семейство C_i непустых множеств, то можно рассматривать множество D , элементами которого будут выбранные по одному элементу множеств заданного семейства...» Множество D создается программой (D), и множества C_i создаются программами (C_i); вот, определите точно, КАК эти программы взаимодействуют в том конкретном случае, когда вы делаете свой «выбор»! Тогда не будет никаких неясностей. А провозглашение общей «аксиомы» – это тупиковый путь, порожденный только вашим незнанием природы изучаемого

Таким образом, несмотря на наличие в теории множеств серьезнейших противоречий, несмотря на наличие в ней сомнительных методов рассуждений (без которых нет той теории множеств, которая требуется для математических приложений), эта теория и на сегодняшний день остается фундаментом, на котором строится значительная часть современной математики. Положение здесь в некотором смысле сходно с положением в анализе в XVIII столетии. Тогда большинство математиков также видело логическую противоречивость исходных принципов анализа. Многие из них безуспешно пытались преодолеть эти трудности, но из-за этого не отказывались от использования аналитических средств в других науках, да и сам анализ развивался весьма успешно.

Тот факт, что предметом настоящей работы выбрана история теории множеств в XIX в., не означает, что до этого периода в математике не было теоретико-множественных идей. Они, как мы уже упоминали, существовали в математике со времени становления ее как дедуктивной науки. Понятие бесконечности – одно из основных понятий науки вообще, и многие ученые, в том числе и математики, не раз в истории человеческой мысли обращались к нему. XIX век характеризуется в математике тем, что из различных типов бесконечностей, рассматриваемых мыслителями прошлых эпох, был выделен тип актуально бесконечных множеств, состоящих из объектов самой разнообразной природы. И это выделение произошло в силу объективного развития самой математики. Были и раньше попытки рассмотрения актуальных бесконечных множеств, особенно в эпоху средневековья. Многие из этих попыток достаточно интересны.³⁷ Но всё же в них не было той органической связи с развитием математики, которая сложилась в XIX в. Именно в этот период появилась возможность выделения учения о множествах в самостоятельную научную дисциплину,³⁸ быстро оказавшую влияние на всё последующее развитие математики.

предмета. Конечно, в общем случае «аксиома выбора» НЕ верна: если программа D отработает прежде, чем программы C_i успеют создать выбираемые элементы, то множество D построено НЕ будет.

³⁷ См., например, E. Stamm. *Tractatus de Continuo von Thomas Bradwardin*. – Isis, 1936, 31, 13–33; А.П. Юшкевич. *История математики в средние века*. М., Физматгиз, 1961, стр. 390 – 392; J. Pogrebyssky. *Sur la préhistoire de la théorie des ensembles*. – В кн.: А. Koyré. *Mélanges*. Paris, 1964.

³⁸ **В.Э. 2013-02-08:** Если из теперешней «теории множеств» выбросить (лженаучный и несостоятельный) канторизм и оставить один лишь (плодотворный и полезный) квантуализм, то вообще-то оставшаяся часть «теории множеств» вряд ли потянет на статус «самостоятельной научной дисциплины», несмотря на всю полезность квантуализма. Без «трансфинитных чисел», «шкалы алефов», «проблемы континуума» и прочего инвентаря нынешней «теории множеств» там останется только довольно тривиальный аппарат множеств, подмножеств, их пересечений, дополнений и т.д. Но зато место изгнанного канторизма в «теории множеств» способны занять соответствующие разделы ВТ: учение о множествах как продуктах мозговых программ, об алгоритмах, порождающих множества, о взаимодействиях этих алгоритмов и т.д. Это, конечно, будет уже совсем другая теория множеств – но зато подлинная и соответствующая реальности.