Веданотека
Сайт: http://ve-poti.narod.ru/.

Текст «Кантор. Об алгебраических числах»

2013-01-23

Работа Георга Кантора «Об одном свойстве совокупности всех действительных алгебраических чисел» (Über eine Eigenschaft des Inbegriffes aller reellen algebraischen Zahlen. – J. reine und angew. Math., 1874, Bd. 77, S. 258–262; русский перевод Ф.А. Медведева в книге: Кантор Георг. Труды по теории множеств. – М.: Наука, 1985, с. 18–22; ответственные редакторы А.Н. Колмогоров, А.П. Юшкевич) – эта работа Кантора является первой публикацией, в которой он «доказал несчетность континуума».

Предыстория публикации такова: Рихард Дедекинд прислал Кантору (видимо, как и многим другим математикам Германии) свою (видимо, только что изданную) книгу «Непрерывность и иррациональные числа»; Кантор 28 апреля 1872 года в кратком письме поблагодарил его, а спустя полтора года 29 ноября 1873 года обратился к нему: «*Позвольте предложить Вам вопрос, имеющий для меня некоторый теоретический интерес, на который я, однако, не могу ответить. Возможно, Вы сумеете это сделать и любезно напишете мне*»[1]. Это был вопрос о соответствии между множествами натуральных и действительных чисел. В том же письме Кантор пишет:

> «Не столь ли соблазнительно было бы заключить, что (n) нельзя поставить в однозначное соответствие с совокупностью (p/q) всех рациональных чисел p/q? И тем не менее нетрудно доказать, что (n) можно поставить в однозначное соответствие не только с этой совокупностью...»

Он в письме не дает этого доказательства, но считает его элементарным. Дедекинд записал в своем журнале[2]:

> «**29.11.1873 г.** (..) С обратным курьером я ответил, что ответа на первый вопрос я не знаю, но одновременно сформулировал и полностью доказал, что даже совокупность всех алгебраических чисел может быть поставлена в соответствие указанным образом с совокупностью (n) натуральных чисел (некоторое время спустя эта теорема и ее доказательство были почти буквально воспроизведены с применением специального термина «высота», в статье Кантора, появившейся в журнале Крелле,[3] т. 77, но с тем отличием – вопреки моему совету, – что рассмотрена лишь совокупность действительных алгебраических чисел). Однако высказанное мною мнение, что первый вопрос не заслуживает того, чтобы уделять ему много труда, поскольку он не представляет никакого практического интереса, было решительно опровергнуто данным Кантором доказательством существования трансцендентных чисел (J. reine und angew. Math., vol. 77)».

Собственно ответное письмо с доказательством Дедекинда «не обнаружено», но Кантор в следующем письме подтверждает, что доказательство было:

> «**Галле, 2 декабря 1873 г.** Я был очень счастлив, получив сегодня Ваш ответ на мое последнее письмо. Мой вопрос я поставил перед Вами потому, что он возник у меня уже несколько лет тому назад и я всё время интересовался, имеет ли встреченная мною трудность субъективную природу или же она заключена в самой проблеме. Поскольку Вы говорите мне, что и Вы не в состоянии ответить на него, то я могу предположить, что верна как раз вторая возможность. Впрочем, хотел бы добавить, что я никогда не занимался этим всерьез, поскольку не видел для себя

[1] Переписка Кантора и Дедекинда приводится по названной книге «Кантор Георг. Труды по теории множеств» (М.: Наука, 1985), с. 327–333.

[2] По названной книге непонятно, какова была природа «журнала Дедекинда»: то ли это какой-то личный регистр по типу дневника или воспоминаний, то ли это какая-то публикация спустя годы...

[3] **Ф.А. Медведев:** Различие в указании издателя журнала «Journal für die reine...» у Кантора (..) и здесь у Дедекинда объясняется тем, что названный журнал был основан в 1826 г. немецким математиком Крелле и обычно цитировался по его фамилии нередко и после смерти Крелле в 1855 г.

практического интереса, и я вполне разделяю Ваше мнение, когда Вы говорите, что поэтому-то данная проблема не заслуживает того, чтобы уделять ей много внимания. Тем не менее было бы хорошо решить ее: если бы, например, ответ был отрицательным, то тем самым мы получили бы новое доказательство теоремы Лиувилля, в которой утверждается существование трансцендентных чисел.

Ваше доказательство того факта, что (n) может быть поставлена в однозначное соответствие с полем алгебраических чисел, является почти тем же, при помощи которого я доказывал мое утверждение в последнем письме. Я полагаю $n_1^2 + n_2^2 + ... = N$ и затем упорядочиваю элементы».

Спустя пять дней Кантор пишет:

«**Галле, 7 декабря 1873 г.** В последние дни у меня оказалось время более тщательно изучить то предположение, о котором я говорил Вам. Только сегодня я покончил, как мне кажется, с этим делом».

Далее идет доказательство, но не то, которое видно ниже в статье Кантора, а другое, громоздкое. Через два дня новое письмо:

«**Галле, 9 декабря 1873 г.** Для доказанной недавно теоремы я нашел теперь более простое доказательство, в котором не требуется разложение последовательности (I) в (1), (2), (3). Исходя из последовательности (ω_1, ω_2, ..., ω_ν , ...,) я непосредственно показываю, что во всяком заданном интервале (α ... β) можно определить число η, не принадлежащее (I). Этого достаточно, чтобы вывести отсюда то заключение, что совокупность (x) не может быть поставлена в однозначное соответствие с совокупностью (n)».

Это уже то доказательство, которое будет в статье. Спустя 16 дней такое письмо Кантора:

«**Берлин, 25 декабря 1873 г.** Хотя я не намеревался пока публиковать что-либо по вопросу, недавно впервые обсужденному с Вами, мне пришлось неожиданно сделать это. Мои результаты я сообщил 22 декабря г-ну Вейерштрассу, но тогда не хватило времени поговорить об этом подробно. 23 декабря я был очень обрадован его визитом, что позволило мне сообщить ему доказательство. Он посоветовал опубликовать это, принимая во внимание, что речь идет об алгебраических числах. Тогда я написал небольшую статью под названием «Об одном свойстве совокупности всех действительных алгебраических чисел» и послал ее г-ну профессору Борхардту, чтобы он рассмотрел возможность опубликования ее в «J. reine und angew. Math.». При редактировании этой статьи, как Вы увидите, оказались очень полезными Ваши замечания и Ваш способ выражений. Именно об этом я и хотел поставить Вас в известность».

Так возникла та статья, которая приводится ниже и которая считается легендарной у кантористов.

Кантор Г. «Об одном свойстве совокупности всех действительных алгебраических чисел»

Под действительным алгебраическим числом вообще будет пониматься действительная числовая величина ω, удовлетворяющая отличному от тождества уравнению вида

$$a_0\omega^n + a_1\omega_{n-1} + ... + a_n = 0, \qquad (1)$$

где n, a_0, a_1, ... , a_n – целые числа; при этом числа n и a_0 можно брать положительными, коэффициенты a_0, a_1, ... , a_n – взаимно простыми, а уравнение (1) – неприводимым. Этими условиями достигается то, что по известным основным теоремам арифметики и алгебры уравнение (1), которому удовлетворяет некоторое алгебраическое число, оказывается вполне определенным; обратно, уравнению вида (1) соответствует, как известно, самое большее столько алгебраических чисел, какова его степень n. Рассматриваемые все вместе, действительные алгебраические числа образуют некоторую совокупность числовых величин, которая будет обозначаться через (ω). Как вытекает из простых соображений, эта совокупность обладает тем свойством, что во всякой окрестности любого мыслимого числа α расположено бесконечно много чисел из (ω). Поэтому, на первый взгляд, тем поразительнее может показаться замечание, что совокупности (ω) можно однозначно поставить в соответствие совокупность всех целых положительных чисел ν, которая будет обозначаться через (ν), и притом так, что всякому алгебраическому числу ω соответствует определенное целое положительное число ν и, наоборот, всякому целому положительному числу ν соответствует определенное число ω; а значит, выражая то же самое другими словами, совокупность (ω) можно мыслить в форме законченной бесконечной последовательности

$$\omega_1, \omega_2, ..., \omega_\nu, ..., \qquad (2)$$

в которую входят все индивиды из (ω), причем каждый из них занимает определенное место в (2), задаваемое соответствующим индексом. Как только найден один закон, по которому можно представить такое соответствие, так его можно произвольно модифицировать; поэтому достаточно предложить в §1 такой метод, который, как мне кажется, доставит меньше всего хлопот.

Чтобы указать на одно применение этого свойства совокупности всех действительных алгебраических чисел, к §1 я добавлю §2, где устанавливаю, что если предложена любая последовательность действительных числовых величин вида (2), то во всяком заданном интервале (α ... β) можно определить числа η, которые не содержатся в (2). Комбинируя содержание этих двух параграфов, получаем новое доказательство установленной впервые Лиувиллем теоремы, что во всяком заданном интервале (α ... β) имеется бесконечно много трансцендентных, т.е. не алгебраических, действительных чисел.[4] Далее, теорема из §2 оказывается основанием того, почему совокупность всех действительных числовых величин, образующую так называемый континуум (например, совокупность всех действительных чисел, которые ≥ 0 и ≤ 1), нельзя однозначно отобразить на совокупность (ν). Таким образом, я нашел четкое различие между так называемым континуумом и совокупностью вида совокупности всех действительных алгебраических чисел.

§ 1

Если мы обратимся к уравнению (1), которому удовлетворяет алгебраическое число ω и которое по сделанным предположениям является вполне определенным, то сумму абсолютных величин его коэффициентов, увеличенную на число n–1, где n – степень числа ω, можно назвать высотой числа ω и обозначить через N; следовательно, применяя ставший обиходным способ обозначений, имеем

$$N = n-1 + |\, a_0 \,| + |\, a_1 \,| + ... + |\, a_n \,|. \qquad (3)$$

Тем самым, высота N всякого действительного алгебраического числа ω является определенным целым положительным числом. Обратно, для всякого положительного целочисленного значения N существует лишь конечное число алгебраических действительных чисел высоты N; пусть их число будет $\varphi(N)$; например, $\varphi(1) = 1$, $\varphi(2) = 2$, $\varphi(3) = 4$. Тогда числа совокупности (ω) можно упорядочить следующим образом: в качестве первого числа ω_1 берем число высоты $N = 1$; за ним будут следовать $\varphi(2) = 2$ алгебраических числа, имеющих высоту $N = 2$ и расположенных по величине, и их мы обозначим через ω_2, ω_3; за ними идут $\varphi(3) = 4$ числа, имеющих высоту $N = 3$ и расположенных по величине; вообще после того как таким способом перечислены все числа из (ω) до некоторой высоты $N = N_1$ и помещены на определенные места, то за ними следуют действительные алгебраические числа высоты $N = N_1+1$, причем они идут в порядке возрастания их величин. Так мы получаем совокупность (ω) всех действительных алгебраических чисел в виде

$$\omega_1, \omega_2, ..., \omega_\nu, ...,$$

и, принимая во внимание это расположение, можно говорить о ν-м действительном алгебраическом числе, причем ни одно из чисел совокупности (ω) не потеряно.

[4] **Ф.А. Медведев:** В 1844 г. французский математик Лиувилль нашел специфическую характеристику разложений алгебраических чисел в цепные дроби, что позволило ему обнаружить существование трансцендентных чисел. Эти результаты изложены им детальнее в 1851 г. Об истории трансфинитных чисел см. [Liouville J. Sur les classes très-étendues de quantités dont la valeur n'est ni algébrique, ni même réductible a des irrationnelles algébriques. – J. math, pures et appl., 1851, vol. 16, p. 133–142.].

§ 2

Если по какому-нибудь закону задана бесконечная последовательность отличных друг от друга числовых величин

$$\omega_1, \omega_2, ..., \omega_\nu, ..., \qquad (4)$$

то во всяком заданном интервале (α ... β) можно определить число η (а значит, и бесконечно много таких чисел), которое не содержится в последовательности (4). Это и предстоит теперь доказать.

Мы начинаем с произвольно заданного интервала (α ... β), и пусть $\alpha < \beta$. Два первых числа последовательности (4), которые расположены в этом интервале (за исключением концов), можно обозначить через α', β', и пусть $\alpha' < \beta'$; аналогично два первых числа нашей последовательности, расположенных внутри (α' ... β'), обозначим через α'', β'', и пусть $\alpha'' < \beta''$; по тому же закону образуем следующий интервал (α''' ... β''') и т.д. Здесь, следовательно, α', α'', ... по самому определению являются определенными числами нашей последовательности (4), индексы которых всё время возрастают; то же самое справедливо для чисел β', β'', ... Примем, далее, числа α', α'', ... возрастающими по величине, а числа β', β'', ... убывающими по величине. Каждый из интервалов (α ... β), (α' ... β'), (α'' ... β''), ... содержит в себе все следующие за ним. Теперь мыслимы только два случая.

Или число построенных таким образом интервалов конечно, и пусть последний из них будет ($\alpha^{(\nu)}$ ... $\beta^{(\nu)}$). Так как внутри него может быть расположено самое большее одно число последовательности (4), то в этом интервале можно взять число, не содержащееся в последовательности (4), и тем самым для этого случая теорема доказана.

Или число построенных интервалов бесконечно. Тогда числа α, α', α'', ..., поскольку они возрастают по величине, не возрастая до бесконечности, имеют определенный предел α^∞; то же самое верно для чисел β, β', β'', ..., так как они убывают по величине, и пусть их предел β^∞. Если $\alpha^\infty = \beta^\infty$ (случай, имеющий место для совокупности (ω) всех действительных алгебраических чисел), то легко убедиться, обратившись к определению интервала, что число $\eta = \alpha^\infty = \beta^\infty$ не может содержаться в нашей последовательности.[5] Если же $\alpha^\infty < \beta^\infty$, то всякое число η внутри интервала (α^∞ ... β^∞) или на его границе удовлетворяет выставленному требованию не содержаться в последовательности (4).

Теоремы, доказанные в этой статье, можно обобщать в разных направлениях, из которых здесь упомянем лишь об одном:

«Если ω_1, ω_2, ..., ω_n, ... – конечная или бесконечная последовательность линейно независимых друг от друга чисел (так что невозможно равенство $a_1\omega_1$, $a_2\omega_2$, ..., $a_n\omega_n = 0$ с целочисленными коэффициентами, не все из которых равны нулю) и мы вообразим совокупность (Ω) всех тех чисел Ω, которые можно представить в виде рациональных функций с целочисленными коэффициентами от заданных чисел ω, то во всяком интервале (α ... β) существует бесконечно много чисел, не содержащихся в (Ω)».

Действительно, при помощи умозаключения, аналогичного изложенному в §1, убеждаемся, что совокупность (Ω) можно представить в виде последовательности

$$\Omega_1, \Omega_2, ..., \Omega_\nu, ...,$$

откуда, принимая во внимание вывод §2, следует справедливость этого предложения.

Совсем частный случай приведенной здесь теоремы (когда последовательность ω_1, ω_2, ... , ω_n, ... конечна, а степень рациональных функций, задающих совокупность (Ω), фиксирована) доказан господином Миннигероде (см.: Math. Ann., Bd. 4, S. 497)[6] путем сведения к принципам Галуа.

---

[5] Если бы число η содержалось в нашей последовательности, то мы имели бы $\eta = \omega_p$, где p – определенный индекс; однако это невозможно, ибо ω_p не содержится внутри интервала ($\alpha^{(p)}$ ... $\beta^{(p)}$), тогда как число η по его определению расположено внутри этого интервала.

[6] **Ф.А. Медведев:** Миннигероде – приват-доцент по математике Гёттингенского университета, лекции которого Кантор слушал в 1866 г.; с 1874 г. – экстраординарный, а с 1885 г. – ординарный профессор университета в Грейфсвальде. [Minnigerode B. Bemerkung über irrationale Zahlen. – Math. Ann., 1871, Bd. 4, S. 497–498.]

Примечание Эрнста Цермело[7]

В настоящей статье, открывающей серию теоретико-множественных работ, речь идет еще исключительно об элементарном понятии «счетных множеств». В ней показывается, что как совокупность рациональных, так и совокупность алгебраических чисел подпадают под это понятие, а совокупность действительных чисел конечного интервала не подпадает под него. Первое доказательство, которое странным образом только одно вошло в название работы, является относительно простым и естественно получается из понятия алгебраического числа, так только поставлен сам вопрос. Напротив, приведенное в §2 доказательство «несчетности» действительных чисел удалось Кантору, как он утверждает сам, с трудом и после нескольких тщетных попыток. Оно представляется нам сегодня несравненно более глубоким результатом данного исследования, а по его методу оно типично для специфически теоретико-множественного способа умозаключений. Только после доказательства того, что существуют и вполне определенные «несчетные» математические совокупности, понятие «счетности» получает смысл и значение, и тогда переход к общему понятию «мощности» является лишь следующим шагом. Терминология в этой основополагающей работе еще не установилась: вместо слова «множество» речь идет о «собрании» или «совокупности», да и слово «счетное» здесь еще отсутствует; все время говорится об «однозначном соответствии» элементов одного собрания элементам другого. Ввиду ясности канторовского изложения, особых пояснений здесь не требуется. Впрочем, не совсем ясно, почему Кантор ограничил свою теорему «действительными» алгебраическими числами, тогда как его доказательство в целом непосредственно применимо ко всем (действительным и комплексным) алгебраическим числам.[8]

Комментарий В.Э.

§1. О первом параграфе Кантора

Итак, из приведенных выше документов совершенно ясно, что содержащееся в §1 статьи Кантора положение (о «счетности» алгебраических чисел) на самом деле доказал Дедекинд (в письме Кантору от 8 декабря 1873 года), а Кантор в публикуемой статье преподнес это как свой собственный результат, даже не упомянув имя Дедекинда. Это был поступок явно непорядочный – по тогдашним меркам в такой же мере, как и по сегодняшним. К тому же Дедекинд сохранил все письма Кантора, а Кантор письма Дедекинда то ли уничтожил, то ли потерял – в том числе и письмо с доказательством Дедекинда.

---

[7] **В.Э. 2013-01-23:** Эрнст Цермело был составителем и редактором того издания трудов Кантора, с которого делался русский перевод. (Gesammelte Abhandlungen mathematischen und philosophischen Inhalts. Mit erlauterenden Anmerkungen sowie mit Erganzungen aus dem Briefwechsel Cantor–Dedekind / Hrsg. von E. Zermelo; Nebst einem Lebenslauf Cantors von A. Fraenkel. Berlin: Springer, 1932. Переизд.: Hildesheim, 1962; Berlin etc., 1980.)

[8] **В.Э. 2013-01-23:** По этому последнему вопросу Кантор писал Дедекинду из Берлина 27 декабря 1873 года: «То, что я придал ограниченный характер опубликованной статье, объясняется отчасти условиями, господствующими здесь, о которых я, возможно, когда-либо расскажу Вам. Но, с другой стороны, я полагаю, что сначала целесообразно применить мое рассуждение в частном случае (вроде случая действительных алгебраических чисел). Возможные обобщения, – а я сумел найти их несколько, – уже не могут составить большого труда; сделаю ли это я или кто другой, это несущественно». Дедекинд записал в своем журнале: «**25.12.1873.** Кантор пишет (из Берлина), что он подготовил (по рекомендации Вейерштрасса) небольшую статью под названием «*Об одном свойстве совокупности всех действительных алгебраических чисел». «При редактировании этой статьи, как Вы увидите, оказались очень полезными Ваши замечания и Ваш способ выражений*». С обратным курьером я отвечаю, посоветовав ему отбросить ограничение на поле алгебраических чисел быть действительными»; «**27.12.1873.** Кантор пишет (из Берлина): «*То, что я придал ограниченный характер опубликованной статье, объясняется отчасти условиями, господствующими здесь, о которых я, возможно, когда-либо расскажу Вам. Но, с другой стороны, я полагаю, что сначала целесообразно применить мое рассуждение в частном случае (вроде случая действительных алгебраических чисел)*». Я не получил разъяснения относительно «берлинских условий». В последующем мы уже не возвращались к этой статье (J. reine und angew. Math., vol. 77)». (Кантор Георг. Труды по теории множеств. – М.: Наука, 1985, с. 331 и 333).

Всё же вряд ли стоит обвинять Кантора в намеренном плагиате и в желании присвоить себе результат Дедекинда. Скорее можно сказать, что деятельность Кантора в этом вопросе отмечена печатью общей суетливости и непродуманности. 23 декабря Вейерштрасс «нанес визит» Кантору в его берлинском обиталище (в гостиницу или где он там жил в чужом городе) и посоветовал публиковать статью, а 25 декабря Кантор уже сообщает Дедекинду, что он «послал ее г-ну профессору Борхардту». Таким образом, у Кантора на сочинение, обдумывание, редактирование статьи было, самое большое, двое суток времени (а скорее: один день).

Видимо, Дедекинд тоже так думал, и поэтому не стал упрекать Кантора и поднимать этот вопрос, хотя записал в свой «журнал» однозначно, что это именно он «*сформулировал и полностью доказал, что даже совокупность всех алгебраических чисел может быть поставлена в соответствие указанным образом с совокупностью (n) натуральных чисел*».

§2. О втором параграфе Кантора

Та же печать суетливости и непродуманности лежит и на втором параграфе Кантора. Читая его, создается впечатление, что Кантор не доказывает теорему, а уговаривает читателя поверить ему. Прочитаем еще раз ядро этого доказательства:

> Или число построенных интервалов бесконечно. Тогда числа α, α', α'', ..., поскольку они возрастают по величине, не возрастая до бесконечности, имеют определенный предел α^∞; то же самое верно для чисел β, β', β'', ..., так как они убывают по величине, и пусть их предел β^∞. Если $\alpha^\infty = \beta^\infty$ (случай, имеющий место для совокупности (ω) всех действительных алгебраических чисел), то легко убедиться, обратившись к определению интервала, что число $\eta = \alpha^\infty = \beta^\infty$ не может содержаться в нашей последовательности.[9] Если же $\alpha^\infty < \beta^\infty$, то всякое число η внутри интервала (α^∞ ... β^∞) или на его границе удовлетворяет выставленному требованию не содержаться в последовательности (4).

Почему-то упоминаются алгебраические числа; сначала сказано, что вывод получен «*обратившись к определению интервала*», а потом в сноске (видимо, позже, уже во время чтения корректуры, иначе зачем выносить в сноску?) добавлено что-то про индексы...

Доказательство Кантора несостоятельно, но об этой несостоятельности мы поговорим чуть позже, а сейчас я обращаю внимание читателя на общую путанность мыслей Кантора. Эту путанность видел и, например, переводчик Кантора на русский язык Ф.А. Медведев. В своей книге «Развитие теории множеств в XIX веке» («Наука», Москва 1965) он приводит это доказательство Кантора как «чрезвычайно важное». Но он не цитирует Кантора (как оно было бы нормально), а вместо этого сам излагает всё заново и более стройно. Прочитаем и его:

> Содержание заметки сводится к следующему. Методом Дедекинда доказывается счетность множества всех действительных алгебраических чисел. Затем показывается, что если по какому-либо закону задан счетно-бесконечный ряд отличных друг от друга действительных чисел
>
> $$a_1, a_2, ..., a_n ..., \qquad (1)$$
>
> то в любом заданном интервале (α, β) можно указать такое число η, которое не принадлежит ряду (1). Доказательство этого факта, ввиду его особой важности в теории множеств, а также потому, что в нем используется метод вложенных отрезков, мы приведем полностью, следуя Кантору.
>
> Пусть задан какой-либо интервал (α, β) и $\alpha < \beta$. Если в нем совсем нет чисел из ряда (1) или содержится лишь одно такое число, то теорема доказана. Пусть поэтому α' и β' – два первых попавшихся нам числа ряда (1), содержащиеся внутри (α, β) и не совпадающие с его концами, и пусть $\alpha' < \beta'$. Если в интервале (α', β') нет чисел ряда (1) или же содержится лишь одно такое число, то теорема доказана. Если в него попали не одно, а более чисел из (1), то мы можем выбрать два числа α'', β'', $\alpha'' < \beta''$ и рассмотреть интервал (α'', β'') и т.д. Процесс построения интервалов ($\alpha^{(\nu)}$, $\beta^{(\nu)}$) может быть или конечен или бесконечен. Если число построенных таким образом интервалов конечно и последний из них есть ($\alpha^{(\nu)}$, $\beta^{(\nu)}$), то в нем может лежать самое большее одно число ряда (1), пусть a_k, так как иначе построение продолжалось бы. Но тогда теорема доказана, так как в ($\alpha^{(\nu)}$, $\beta^{(\nu)}$), $\alpha^{(\nu)} < \beta^{(\nu)}$, всегда можно указать число, отличное от a_k.
>
> Предположим поэтому, что число получаемых таким образом интервалов бесконечно. Тогда мы имеем две последовательности
>
> $$\alpha_1 < \alpha' < \alpha'' < ... ,$$

---

[9] Если бы число η содержалось в нашей последовательности, то мы имели бы $\eta = \omega_p$, где p – определенный индекс; однако это невозможно, ибо ω_p не содержится внутри интервала ($\alpha^{(p)}$ ... $\beta^{(p)}$), тогда как число η по его определению расположено внутри этого интервала.

$$\beta_1 < \beta' < \beta'' < \dots .$$

первая из которых монотонно возрастает и ограничена сверху (любым из чисел β), а вторая монотонно убывает и ограничена снизу (любым из чисел α). Пусть предел первой последовательности есть ξ_1, а предел второй ξ_2. Если $\xi_1 < \xi_2$, то теорема доказана, так как любое число интервала (ξ_1, ξ_2) не содержится в ряду (1). Если же $\xi_1 = \xi_2$, то число $\eta = \xi_1 = \xi_2$ не может содержаться в ряде (1), так как если бы оно в нем содержалось, то оно было бы занумеровано каким-либо определенным индексом p по мере включения чисел ряда (1) в интервалы ($\alpha^{(v)}$, $\beta^{(v)}$), а значит лежало бы вне интервала ($\alpha^{(p)}$, $\beta^{(p)}$), тогда как число η по самому его определению расположено внутри ($\alpha^{(p)}$, $\beta^{(p)}$). Следовательно, и в этом случае теорема доказана. Тем самым доказано, что множество действительных чисел интервала не может быть перенумеровано при помощи натуральных чисел.

В этом доказательстве мы видим применение того же самого диагонального метода, которым за год до того пользовался Дюбуа-Раймон при построении возрастающей быстрее любой из заданной последовательности всё более быстро возрастающих функций: для предложенной счетной последовательности объектов (чисел у Кантора, функций у Дюбуа-Раймона) строится объект (число или функция), не содержащийся в заданной последовательности.[10]

Очевидно, что у Медведева то же самое доказательство, что и у Кантора, только изложенное более стройно и ясно, и чуточку изменены обозначения. Медведев называет это сначала «методом вложенных отрезков», а в конце «диагональным методом» на том основании, что «*строится объект* (..)*, не содержащийся в заданной последовательности*».

У Дюбуа-Раймона (его рассуждения описаны в книге Медведева) действительно имеется диагональ, и по этой диагонали строящийся объект в каком-то элементе отличается от каждого объекта прежней последовательности. При этом Дюбуа-Раймон НЕ принимает «постулат Кантора» (что в бесконечности будет $a^n = n$); у него в бесконечности остается $n = n$, поэтому Дюбуа-Раймон действительно строит свой новый объект. Если же принимается «постулат Кантора», то и по диагонали не строится то, что ожидают кантористы. А здесь нет даже и диагонали, которая определяла бы отличие строящегося объекта от всех предыдущих.

Здесь вообще нет никакого построения.

На чем основывается мнение Кантора и Медведева, будто здесь что-то строится? На том, что есть последовательности $\alpha_1 < \alpha' < \alpha'' < \dots$, $\beta_1 < \beta' < \beta'' < \dots$, которые в бесконечном случае (а конечные случаи нас не интересуют подавно) будут иметь «пределы»: α^∞ и β^∞ у Кантора, ξ_1 и ξ_2 у Медведева. Но что такое «предел» для ЭТИХ последовательностей?

Когда у нас есть какая-нибудь функция, скажем, $y = f(x)$, которая при $x \to \infty$ имеет предел, положим, $y = 3$, то у нас задан закон, по которому будут меняться соответствующая последовательность приближений. По этому закону мы можем найти любой член последовательности сколь угодно далеко, и «в конце концов», когда «потенциальная бесконечность превращается в актуальную», число 3 станет «значением функции»; это и есть «предел».

А у последовательностей Кантора–Медведева никакого закона, их определяющего, нет. Эти последовательности состоят только из чисел исходной последовательности (1). Есть такие числа – есть последовательность $\alpha_1 < \alpha' < \alpha'' < \dots$; нет таких чисел – нет дальше последовательности. Если у этой последовательности есть предел, то приближение к нему происходит только числами исходной последовательности (1), и сам этот предел тоже число последовательности (1).

На то она и бесконечность, чтобы быть неисчерпаемой: числа из (1) всё есть и есть!

А Кантор и Медведев приняли, что у их последовательностей вдруг откуда-то появится какой-то посторонний «предел», отличный от членов ряда. Они приняли то, что хотят доказать, и потом этим же и «доказывают» желаемое. Классическая логическая ошибка – «порочный круг».

§3. Случай с Подниексом

Когда закончилась дискуссия «Канториана»[11], я в конце 1980-х или в начале 1990-х взял в библиотеке книгу «Кантор Георг. Труды по теории множеств. – М.: Наука, 1985» (кажется, брал даже два раза). Тогда я видел приведенную выше статью Кантора, но не углублялся в нее, не переписал ее, не запомнил способ доказательства (больше конспектировал письма Кантора–Дедекинда и другие вещи). Книга была в моем распоряжении короткое время, и получить ее снова было довольно сложно – требовалась целая экспедиция в библиотеку (которая стала теперь платной и вообще почти не работающей...).

[10] Медведев Ф.А. «Развитие теории множеств в XIX веке». «Наука», Москва 1965, с. 95–96.

[11] См. книги {CANTO} и {CANTO2}.

Поэтому, когда мне понадобилось писать об этом доказательстве Кантора, я воспользовался не библиотечной и труднодоступной для меня книгой трудов Кантора, а книжкой Карлиса Подниекса, которую он мне подарил в 1992 году и которую я мог в любой момент просто взять, протянув руку к книжной полке. Там тоже описывалось доказательство Кантора (именно этой теоремы), и мне и в голову не приходило, что это описание может быть неправильным. Так это описание попало сначала в книгу REVIS, а потом в статью Веданопедии «Диагональный метод».

Теперь наступили другие времена, не надо уже ходить в платные библиотеки, книги можно скачать с Интернета; я скачал ту же книгу «Кантор Георг. Труды по теории множеств. – М.: Наука, 1985» (в отличие от большинства интернетовских книг засканированную очень хорошо как *Djvu* файл!) и стал работать с ней.

Велико же было мое удивление, когда я обнаружил, что Кантор дает совершенно другое доказательство, нежели то, что давал Подниекс как якобы канторовское. Досада, конечно, была, что из-за Подниекса в мои сочинения попало неправильное описание доказательства Кантора, но что теперь поделаешь! Однако сейчас нам интереснее другое: **почему** Подниекс (или тот автор, у которого он списывал) заменили подлинное доказательство Кантора на другое?

Ответ напрашивается сам собой: Да потому, что они тоже **видели** несостоятельность канторовского доказательства! Они, конечно, были уверены, что теорема-то в общем правильна, но только Кантор не смог ее как следует доказать, потому и подменили доказательство на более убедительное – по их мнению.

Сейчас я приведу описание рассматриваемой нами теоремы еще и по Подниексу (К.М. Подниекс. «Вокруг теоремы Геделя». Рига, «Зинатне», 1992, с. 40–41):

> ...В ответном письме Р. Дедекинд показал, как можно перенумеровать натуральными числами все алгебраические числа. Но перенумеровать все действительные числа ему не удалось...
>
> Разумеется, это не случайно, поскольку в своем следующем письме Р. Дедекинду (7 декабря 1873 г.) Г. Кантор показывает, что взаимно однозначное соответствие между натуральными и действительными числами невозможно. В своем доказательстве Г. Кантор применил конструкцию, названную впоследствии диагональным методом. Он исходил из произвольной последовательности действительных чисел $a_1, a_2, ..., a_n, ...$ и произвольного интервала (b, c), делил интервал на три части, брал ту из частей, которая не содержит a_1, затем делил на три эту часть и брал ту треть, которая не содержит a_2, и т.д. В результате получалась последовательность стягивающихся интервалов (b_i, c_i):
>
> $$b_1 \le b_2 \le b_3 \le ... \le c_3 \le c_2 \le c_1.$$
>
> Общая точка (предел) этих интервалов и представляет собой действительное число, не входящее в последовательность $a_1, a_2, ..., a_n, ...$ Таким образом, никакая последовательность, пронумерованная натуральными числами, не может исчерпать все действительные числа.
>
> Это была еще одна революция – в представлениях о математической бесконечности. Оказывается, наряду с бесконечным множеством натуральных чисел существует «еще более бесконечное» множество действительных чисел, т.е. существуют бесконечности по крайней мере двух типов. Теорема Кантора дает также поразительно простое доказательство существования трансцендентных чисел (и одновременно доказательство того, что трансцендентных чисел «гораздо больше», чем алгебраических, которые можно перенумеровать с помощью натуральных чисел). Правда, конкретные трансцендентные числа построил еще в 1844 г. Ж. Луивилль, а в 1873 г. Ш. Эрмит доказал, что трансцендентным является число *e*.

Вот, это доказательство и дается мною в статье «Диагональный метод» – и там ошибочно приписывается самому Кантору. (Так как ко мне оно попало от Подниекса, то назовем его «доказательством Подниекса» – в противоположность доказательствам Кантора и Медведева).

В цитированном тексте Подниекс утверждает, что именно это доказательство Кантор и предъявил Дедекинду 7 декабря 1873 г. Но то, что он предъявил на самом деле, напечатано на страницах 329 и 330 упомянутых «Трудов Кантора». Это совсем другое, очень длинное доказательство (я не буду его здесь приводить), и никаких трех частей в интервалах там нет. На два дня позже Кантор сообщает Дедекинду, что нашел доказательство попроще (видимо то, которое потом напечатано в статье), но в письме он его не приводит. Так что Дедекинд до напечатанной статьи видел только первое, громоздкое доказательство.

«Доказательство Подниекса», конечно, возвышается на голову над оригинальным доказательством Кантора (не зря заменяли!). У Кантора (и Медведева) логическая схема рассуждения, если ее до предела оголить, такова:

1. Постулат 1: Существует такой предел $\xi_1 = \xi_2$ последовательностей $\alpha_1 < \alpha' < \alpha'' < \ldots$, $\beta_1 < \beta' < \beta'' < \ldots$, которого нет в (1).

2. Предположение о том, что в (1) содержатся все числа, противоречит Постулату 1.

3. Следовательно, в (1) содержатся не все числа.

4. Теорема доказана.

То есть, существование η просто постулируется, а все «доказательства» – всего лишь декорации вокруг этого постулата.

Иное дело у Подниекса – у него существование предела не просто постулируется, а предел конструируется – строится (по определенному алгоритму). Но у него постулируется другое: что будет $3^n = n$ при бесконечности. Поэтому его доказательство тоже мы не можем считать состоятельным.

§4. Действительные отличия континуума

Итак, теорема Кантора, данная в §2 его статьи (о том, что континуум нельзя перенумеровать) – несостоятельна.

Однако общий вывод, который он делает, полагая, что теорему доказал, очень скромен (он мною подчеркнут красным в преамбуле канторовской статьи): «*я нашел четкое различие между так называемым континуумом и совокупностью вида совокупности всех действительных алгебраических чисел*».

Здесь нет еще превосходящих мощностей, разных бесконечностей, «трансфинитных чисел» и всей прочей чепухи, которая в последующие годы вырастет из этого. Здесь просто утверждается, что между алгебраическими числами и «континуумом» имеется «четкое различие» (по «теоретико-множественным» характеристикам).

Ну, а это утверждение неоспоримо: конечно же, различие есть. И сейчас я покажу, в чем в действительности состоит это различие.

Почему Кантор мог установить взаимно однозначное соответствие между натуральными числами и рациональными числами, а Дедекинд – между натуральными и алгебраическими? Потому, что рациональные и алгебраические числа характеризуются конечным числом признаков.

Так рациональное число p/q характеризуется всего двумя признаками (p и q). Каждый из признаков может принимать значения до бесконечности, но их остается всего два. Поэтому можно найти такой алгоритм, который линейным образом (одно за другим) будет перебирать все рациональные числа («устанавливать взаимно однозначное соответствие» с натуральными числами).

У алгебраических чисел система признаков сложнее, но число признаков тоже остается конечным. Поэтому для них тоже можно найти алгоритм, линейным образом их перебирающий.

У действительных чисел в общем случае количество признаков становится бесконечным. Так, например, произвольное иррациональное число может быть охарактеризовано только бесконечной последовательностью цифр его десятичного, двоичного или другого разложения. Тем самым становится невозможным найти линейный алгоритм, их перебирающий (т.е. такой, который брал бы их одно за другим), – потому что алгоритму приходится «перескакивать» через бесконечность каждого отдельного иррационального числа, идти одновременно к двум бесконечностям: к бесконечности количества элементов и к бесконечности каждого отдельного элемента.

Таким образом, подлинное различие между «континуумом» и рациональными или алгебраическими числами состоит в бесконечности признаков у элементов континуума – в бесконечности самих элементов.

Из-за этой бесконечности элементов континуума появляются два следствия:

1) для них невозможно найти линейный алгоритм перебора; и

2) в них можно запускать бесконечный диагональный процесс.

Оба эти следствия вытекают из одной и той же причины (из бесконечности элементов континуума), поэтому они всегда идут парой: либо оба есть, либо обоих нет.

Но это отличие континуума (и вытекающие из него два следствия) не имеют никакого отношения к количеству элементов в континууме (к его «мощности») – они имеют отношение только к количеству элементов в элементах континуума (к тому, что те бесконечны).

Между элементами континуума и натуральными числами всё равно можно установить взаимно однозначное соответствие, но только, разумеется, не по линейному, а по нелинейному алгоритму (такому, который идет не к одной, а сразу к двум бесконечностям; Кантор и кантористы такие нелинейные алгоритмы вообще никогда не рассматривали).

Всё учение Кантора, выросшее в дальнейшем из «четкого различия» между континуумом и алгебраическими числами, о котором он говорит в данной статье, базируется на одной фундаментальной ошибке: на том, что он отнес к количеству элементов в континууме то, что на самом деле относится к количеству элементов в элементах континуума.

А все попытки «доказать», что в (самом) континууме больше элементов, чем в «счетном множестве», несостоятельны (как несостоятельны в этом документе были «доказательства» Кантора, Медведева и Подниекса) и в ходе этих попыток совершаются всё новые и новые логические ошибки.

Достаточно это понять и осмыслить, чтобы все воздушные замки Кантора рухнули, и за их руинами открылась картина подлинной математической реальности.