

Веданотека

Сайт: <http://ve-poti.narod.ru/>.

Текст «Кантор. К учению о многообразиях»

2013-02-12

Настоящий документ Веданопедии (Веданотеки – ее хранилища оригинальных текстов различных авторов) содержит две статьи Георга Кантора:

1) «К учению о многообразиях» (Ein Beitrag zur Mannigfaltigkeitslehre. – J. reine und angew. Math., 1878, Bd. 84, S. 242–258. Перевод Ф.А. Медведева); это с. 22–35 в книге: Кантор Георг. Труды по теории множеств. – М.: Наука, 1985; ответственные редакторы А.Н. Колмогоров, А.П. Юшкевич, и в этой книге данная работа Кантора обозначается как I.3 – первый раздел («Труды по теории множеств»), третий труд.

2) «Об одном элементарном вопросе учения о многообразиях» (Über eine elementare Frage der Mannigfaltigkeitslehre. – Jahresber. Dt. Math. Ver., 1890/1891, Bd. 1, S. 75–78. Перевод Ф.А. Медведева); это с. 170–172 в той же книге, и данная работа там обозначается как I.9 (девятый труд первого раздела).

Статья «К учению о многообразиях» напечатана в 1878 году – спустя 4 года после статьи 1874 года «Об одном свойстве совокупности всех действительных алгебраических чисел» (у нас разобранной в <http://ve-poti.narod.ru/B051.PDF>); в промежутке между ними ничего не было, так что статья 1878 года является прямым продолжением статьи 1874 года.

Коротенькая статья «Об одном элементарном вопросе учения о многообразиях» напечатана еще на 12 лет позже, и в промежутке были обширные работы (занимающие 134 страницы в указанной книге Трудов Кантора) с построением основного здания канторизма. Но в данной коротенькой статье впервые применяется знаменитый впоследствии «канторовский диагональный метод» (см.: <http://ve-poti.narod.ru/A201.PDF>).

В настоящем документе Веданопедии эти две статьи Кантора объединены не только из-за краткости второй, но главным образом потому, что именно в их сравнении раскрываются дальнейшие логические ошибки Кантора после тех, о которых говорилось в документе [B051](#). В том документе были указаны две ошибки:

1) Кантор не доказал, а постулировал, что континуум нельзя сопоставить со «счетным множеством»;

2) Он отнес к количеству элементов в континууме то, что на самом деле относится к количеству элементов в элементах континуума.

В приведенных же здесь статьях отличающиеся мощности континуума и счетного множества считаются уже доказанными, и начинаются логически незаконные манипуляции с «взаимно однозначным соответствием», интерпретируя его то одним, то другим способом, смотря по тому, как более выгодно для цели «доказательства» постулированного заранее различия мощностей множеств.

Первая работа Кантора (об алгебраических числах) прошла, видимо, практически незамеченной, и никто из современников не указал ему на несостоятельность его «доказательства». Потом канторизм встретил резкую оппозицию. «*Всё, что сделал в этой области Кантор, было не математикой, а мистикой*», заявил Кронекер; «*Грядущие поколения будут рассматривать теорию множеств как болезнь, от которой они излечились*», заявил Пуанкаре; интуиционисты и конструктивисты начали создавать новую «конструктивную математику», в которой не было бы канторовских «воздушных замков»... Но меня всё-таки удивляет, почему НИКТО из них вместо произнесения общих фраз не выполнил эту столь несложную работу: просто взять и разобрать основные положения Кантора и указать в них конкретные логические ошибки.

Валдис Эгле

12 февраля 2013 г.

Георг Кантор. «К учению о многообразиях»

Если два вполне определенных многообразия M и N можно однозначно и полно поэлементно сопоставить друг с другом (что всегда возможно и многими другими способами, если это сделано каким-либо одним), то далее удобно говорить, что эти многообразия имеют равную мощность или же что они эквивалентны. Под составной частью многообразия M мы понимаем всякое другое многообразие M' , элементы которого одновременно являются элементами многообразия M . Если два многообразия M и N не имеют равной мощности, то или M с составной частью N , или N с составной частью M имеют равную мощность; в первом случае мы называем мощность M меньшей, а во втором большей, чем мощность N .

Когда рассматриваемые многообразия конечны, т.е. состоят из конечного числа элементов, то, как легко видеть, понятие мощности соответствует понятию численности, а следовательно, понятию целого положительного числа, так как у двух таких многообразий мощности равны именно тогда и только тогда, когда численность их элементов одинакова. Составная часть конечного многообразия всегда имеет меньшую мощность, чем само это многообразие; это отношение перестает быть полностью справедливым для бесконечных, т.е. состоящих из бесконечного числа элементов, многообразий. Только из одного того обстоятельства, что некоторое бесконечное многообразие M является составной частью другого многообразия N или что оно может быть поставлено в однозначное и полное соответствие с некоторой его составной частью, ни в коем случае нельзя заключить, что его мощность меньше мощности N ; это заключение справедливо лишь тогда, когда известно, что мощность M не равна мощности N . Равным образом то обстоятельство, что N является составной частью M или может быть поставлено в однозначное и полное соответствие с некоторой такой частью, нельзя рассматривать как достаточное для того, чтобы мощность M была больше мощности N .

Напомним один простой пример. Пусть M – последовательность целых положительных чисел v , а N – последовательность четных целых положительных чисел $2v$. Здесь N является составной частью M и тем не менее M и N имеют одинаковую мощность.

Как можно легко показать, последовательность целых положительных чисел дает наименьшую из всех мощностей, соответствующих бесконечным многообразиям. Тем не менее класс многообразий, имеющих эту наименьшую мощность, является чрезвычайно богатым и обширным. К этому классу принадлежат, например, все те многообразия, которые г-н Р. Дедекинд в своих прекрасных и ценных исследованиях по алгебраическим числам называет «конечными полями» (см.: Dirichlets Vorlesungen über Zahlentheorie. 2. Aufl. Braunschweig, 1871, S. 425 f.)¹, далее здесь можно привести те рассмотренные впервые мною многообразия, которые я назвал «точечными множествами v -го вида» (см.: Math. Ann., Bd. 5, S. 129) [здесь I.1]². К нему же, очевидно, принадлежит всякое многообразие, выступающее в виде простой бесконечной последовательности с общим членом a_v ; но и двойные и вообще n -кратные последовательности с общим членом $a_{v_1, v_2, \dots, v_n}$ (где $v_1, v_2, \dots, v_n$ независимо друг от друга пробегают все целые положительные числа) содержатся в этом классе. В одном предшествующем случае даже было доказано, что совокупность (ω) всех действительных (и можно было бы добавить: всех комплексных) алгебраических чисел можно мыслить в форме последовательности с общим членом ω_v , что

¹ **Ф.А. Медведев:** Кантор ссылается на X дополнение ко второму изданию «Лекций по теории чисел» выдающегося немецкого математика Дирихле [Dirichlet P.G. Lejeune. *Vorlesungen über Zahlentheorie* / Hrsg. von R. Dedekind. 2. Aufl. Braunschweig: Vieweg, 1871], написанное Дедекиндом [Dedekind R. *Über die Composition der binären quadratischen Formen*: Supplement X zu «Vorlesungen über Zahlentheorie» von P. G. Lejeune Dirichlet. 2. Aufl. Braunschweig: Vieweg, 1871, S. 423–497]. Начиная с издания 1879 г. названных лекций, Дедекинд выделил часть этого дополнения (которую имел в виду Кантор), существенно расширив ее, в самостоятельное XI дополнение. В русском переводе [Дирихле П.Г.Л. *Лекции по теории чисел* / В обр. и с добавл. Р. Дедекинда. М.; Л.: ОНТИ, 1936] последнее отсутствует.

² Здесь и далее имеется в виду – в настоящем издании раздел I, статья 1. – *Примеч. пер.*

означает не что иное, как то, что и многообразие (ω), и любая его бесконечная составная часть имеют мощность всего числового ряда.

Для многообразий этого класса справедливы следующие легко доказуемые теоремы:

«Если M является многообразием мощности последовательности целых положительных чисел, то и каждая бесконечная составная часть M имеет такую же мощность, что и M ».

«Если $M', M'', M''', \dots$ – конечная или просто бесконечная последовательность многообразий, каждое из которых имеет мощность последовательности целых положительных чисел, то и многообразие M , полученное из объединения $M', M'', M''', \dots$, имеет ту же самую мощность».

В последующем мы изучим так называемые непрерывные n -кратные многообразия в отношении их мощности.

В исследованиях, которые провели Риман³ и Гельмгольц⁴, а за ними и другие⁵, о гипотезах, лежащих в основаниях геометрии, их авторы исходили, как известно, из понятия n -кратно протяженного непрерывного многообразия и существенный признак его видели в том обстоятельстве, что его элементы так зависят от n не зависящих друг от друга действительных непрерывных переменных $x_1, x_2, \dots, x_n$, что каждому элементу этого многообразия соответствует допустимая система значений $x_1, x_2, \dots, x_n$, и, наоборот, каждой допустимой системе значений $x_1, x_2, \dots, x_n$, соответствует определенный элемент многообразия. Кроме того, как это вытекает из контекста указанных исследований, обычно принималось то предположение, что взятое за основу соответствие между элементами многообразия и системами значений $x_1, x_2, \dots, x_n$, является непрерывным, так что каждому бесконечно малому изменению системы значений $x_1, x_2, \dots, x_n$, соответствует бесконечно малое изменение отвечающего ей элемента и, наоборот, каждому бесконечно малому изменению элемента соответствует такое же изменение значений его координат. Можно ли считать это предположение достаточным или же его нужно дополнить более специальными условиями с тем, чтобы обеспечить непротиворечивость понятия n -кратного непрерывного многообразия, его надежность,⁶ – это пока можно оставить в стороне. Здесь будет лишь показано, что если мы отбросим его, т.е. не будем накладывать никакого ограничения на соответствие между многообразием и его координатами, то признак, считавшийся названными авторами существенным (т.е. что n -кратно протяженное многообразие – это такое многообразие, элементы которого можно определить по n не зависящим друг от друга действительным непрерывным координатам), оказывается совершенно непригодным.

Как будет показано в нашем исследовании, элементы n -кратно протяженного непрерывного многообразия можно будет однозначно и полно определить даже при помощи одной-единственной действительной непрерывной координаты t . Отсюда тогда вытекает, что если о

³ См.: *Riemanns gesammelte mathematische Werke*. Leipzig, 1876, S. 254 f. **Ф.А. Медведев:** Имеется в виду работа Римана [Риман Б. *О гипотезах, лежащих в основании геометрии*. – Соч. / Пер. под ред. с предисл. и обзор, ст. проф. В.Л. Гончарова. М.; Л.: Гостехтеориздат, 1948, с. 279–293].

⁴ См.: Helmholtz H. *Über die tatsächlichen Grundlagen der Geometrie*. – Verh. natur.-med. Vereins Heidelberg, 1868, Bd. 4, S. 197–202; *Über die Tatsachen, welche der Geometrie zugrunde liegen*. – Nachr. Wiss. Göttingen, Math.-phys. Kl., 1868, N 9; *Populäre Vorträge*. Braunschweig, 1876, H. 3, S. 21 ff. **Ф.А. Медведев:** [Helmholtz H. *Über die tatsächlichen Grundlagen der Geometrie*. – Verh. natur.-med. Vereins Heidelberg, 1868, Bd. 4, S. 197–202; Zusatz. – Ibid., 1869, Bd. 5, S. 31–32; Wiss. Abh. Leipzig, 1883, Bd. 2, S. 610–617], [Гельмгольц Г. *О фактах, лежащих в основаниях геометрии* / Пер. А.В. Васильева. – В кн.: *Об основаниях геометрии*: Сб. классических работ по геометрии и развитию ее идей / Ред. и вступ. ст. А.П. Нортон. VI. – Гостехтеориздат, 1956, с. 356–332], [Гельмгольц Г. *О происхождении и значении геометрических аксиом*. – В кн.: *Философские науки* / Под ред. проф. А.К. Тимирязева. Л.: Гос. изд-во, 1924, ч. 1. Физика, вып. 2, с. 79–107]. Исторический анализ двух последних работ Гельмгольца см. в [Torretti R. *Philosophy of geometry from Riemann to Poincare*. Dordrecht etc.: Reidel Publ. Co, 1978, с. 156–168].

⁵ См.: Rosanes J. *Über die neuesten Untersuchungen in betreff unserer Anschauung vom Raume*. Breslau, 1871, S. 13; Liebmann O. *Zur Analysis der Wirklichkeit*. Strassburg, 1876, S. 58; Erdmann B. *Die Axiome der Geometrie*. Leipzig, 1877, S. 45. **Ф.А. Медведев:** [Rosanes J. *Über die neuesten Untersuchungen in betreff unserer Anschauung vom Raume: Ein Vortrag*. Breslau: Maruscke und Berend, 1871], [Liebmann O. *Zur Analysis der Wirklichkeit: Philosophische Untersuchungen*. Strassburg; Darmstadt: Grübner, 1876], [Erdmann B. *Die Axiome der Geometrie: Eine philosophische Untersuchung der Riemann–Helmholtz'schen Raumtheorie*. Leipzig, 1877]. Розанес – немецкий математик, профессор университета в Бреслау. Либман – немецкий философ, профессор университетов в Страссбурге и Йене. Эрдман – известный философ, профессор университетов в Киле, Бреслау, Галле, Бонне и Берлине.

⁶ Ответ на этот вопрос, к которому я возвращусь в другой связи, мне кажется не представляющим никакой трудности. [Об этом см. работу I.4 и соответствующие примечания.]

характере соответствия не делать никаких предположений, то число независимых непрерывных действительных координат, требующихся для однозначного и полного определения элементов n -кратно протяженного непрерывного многообразия, можно брать произвольным, а значит, оно не может рассматриваться как неизменный признак заданного многообразия. Оказалось, что на поставленный мною вопрос о том, можно ли непрерывное многообразие n измерений однозначно и полно отобразить на непрерывное многообразие только одного измерения, так что каждому элементу одного из них соответствует один и только один элемент другого, приходится ответить утвердительно.

Итак, непрерывную поверхность можно однозначно и полно отобразить на непрерывную линию; то же справедливо для непрерывных тел и непрерывных образов любого числа измерений.

Поэтому, пользуясь введенным выше выражением, мы можем сказать, что мощность любого непрерывного n -кратно протяженного образа равна мощности однократно протяженного непрерывного многообразия, например ограниченного непрерывного отрезка прямой линии.

§0. Комментарий В.Э.

Итак, мы видели, как Кантор ввел понятие «однозначного и полного поэлементного сопоставления» (теперь называемого «взаимно однозначным соответствием» или короче «1–1 соответствием») и понятие «мощности» множества. Это произошло стремительно, как будто лишь напоминая что-то само собой разумеющееся или давно известное. Никакому подробному анализу не подвергались те ситуации, из которых эти понятия выделялись, не было никакого разбора обстоятельств, деталей, тонкостей...

А зря! Кантор избежал бы своих роковых ошибок, если бы сделал такой анализ.

Теперь мы сделаем то, что Кантор должен был сделать в 1870-е годы, прежде чем публиковать свои статьи, а другие математики должны были сделать, читая его сочинения, – но почему-то и они не сделали.

Возьмем сначала понятие «взаимно однозначного соответствия» и используем тот пример, который привел сам Кантор:

Напомним один простой пример. Пусть M – последовательность целых положительных чисел v , а N – последовательность четных целых положительных чисел $2v$. Здесь N является составной частью M и тем не менее M и N имеют одинаковую мощность.

В этом «простом примере» любой спокойный ум, не одержимый маниакальным состоянием, легко различит две ситуации:

Первая ситуация (в ВТ она называется «зависимым соответствием»). Возьмем в множестве M любое конечное подмножество положительных целых чисел, например, первые $n = 20$ из них, и отберем из M четные числа в множество N . Их окажется десять – в два раза меньше, чем элементов в множестве M . Взаимно однозначное соответствие между множествами M и N в этом случае установить невозможно. Посмотрим, что произойдет при наращивании n до бесконечности. В конце концов множество M охватывает все натуральные числа, множество N все четные числа, но отношения между ними НЕ изменяются: по-прежнему 1–1 соответствие между ними установить невозможно.

При зависимом соответствии множество N рассматривается как зависящее от множества M : предполагается, что сперва существует M , а потом из него образуется N , и оно получается таким, каким может получиться по законам этого процесса создания. На понятии зависимого соответствия построен весь классический математический анализ с его правилом Лопиталья, и там существует огромное количество различающихся по «мощности» бесконечных множеств.

Вторая ситуация (в ВТ она называется «независимым соответствием»). Однако возможен и другой подход, когда множества M и N рассматриваются как НЕ зависящие одно от другого, оба заранее данные и бесконечные. В таком случае установление взаимно однозначного соответствия между ними возможно.

Легко видеть, что Кантор пользуется именно независимым соответствием и предполагает вторую ситуацию. Такой выбор, разумеется, возможен и допустим, но при этом Кантор и его последователи обязаны были понимать и отдавать себе отчет в том, что они осуществили именно такой выбор и что существует и вторая альтернатива. Выбрав однажды для сравнения «мощностей» именно независимое соответствие, они должны были тогда пользоваться именно этим

понятием и в дальнейшем, когда сравнивают между собой множества по «мощности». Но вместо этого Кантор (и его последователи) весьма скоро перепрыгивают на зависимое соответствие и вообще прыгают с одного на другое туда и обратно как им заблагорассудится, и таким путем строится вся их «теория».

Вообще понятие независимого соответствия не имеет никакой практической ценности, поскольку ВСЕ бесконечные множества при независимом соответствии равномощны – между всеми ими можно установить взаимно однозначное соответствие. В мире существует только одна бесконечность – та бесконечность, которую создает бесконечно продолжающийся процесс. Процессы могут быть более быстрыми или более медленными по сравнению друг с другом, и от этого появляется различия зависимого соответствия в множествах. Если же на относительные скорости не обращать внимания и смотреть только на то, бесконечен процесс или не бесконечен, то все бесконечности – это уже независимое соответствие – становятся одинаковыми. Кантор полагает, что это не так, что он открыл бесконечности другого рода, но это «открытие» основано только на путанице в мыслях и в понятиях.

На самом деле у Кантора уверенность в существовании «превосходящих» бесконечностей предшествовала всякому исследованию и всяким доказательствам (и эта уверенность имела маниакальную природу, кроющуюся в его психике). Он и занялся-то этим «взаимно однозначным соответствием», которое никого другого в мире тогда не интересовало, с одной лишь целью: обнаружить эту «превосходящую бесконечность». И «кто ищет, тот всегда найдет»: он увидел ее в континууме по сравнению со «счетным множеством», и когда увидел, то его уже не интересовал никакой тщательный разбор подлинной ситуации, ее всесторонний анализ; он помчался вперед, создавая бесконечный ряд всё более и более превосходящих бесконечностей. Главным средством в построении этого бесконечного ряда всё больших бесконечностей был отказ от первоначально принятого независимого соответствия и применение в дальнейшем зависимого соответствия (но это средство сочеталось у него и с другими столь же алогичными приемами).

Разобравшись с зависимым и независимым соответствием, разберемся теперь подробнее и с еще одним аспектом этого дела. Как мы в понятии соответствия отделили зависимое от независимого соответствия, так отделим еще возможность пронумеровать элементы от возможности сопоставить элементы.

Пронумеровать элементы множества можно в том случае, если эти элементы создаются (или, будучи уже созданными, перебираются) линейным образом: один за другим.

Сопоставить же элементы можно и без их нумерации. Так, например, давайте сопоставим натуральные числа и действительные числа в пределах между 0 и 1 (пока не вдаваясь в тонкости сущности чисел, а считая таковыми их двоичные записи – двоичные, а не десятичные лишь потому, что при десятичном представлении уже вторая таблица перекрыла бы у нас почти две страницы, а третья – около 18 страниц; двоичное представление избрано лишь для экономии места и ничего не меняет по сравнению с десятичным).

Начнем сопоставление с двух элементов – натуральным числам 0 и 1 сопоставим рациональные дроби 0,0 и 0,1:

0	0,0
1	0,1

Потом четырем натуральным числам сопоставим четыре рациональные дроби:

00	0,00
01	0,01
10	0,10
11	0,11

Потом восьми натуральным числам восемь рациональных дробей:

000	0,000
001	0,001
010	0,010
011	0,011
100	0,100
101	0,101
110	0,110
111	0,111

и т.д.

Понятно, что этот процесс сопоставления может продолжаться бесконечно, и никогда не наступит такой момент, когда дальнейший процесс сопоставления станет невозможным. Понятно, что «вниз» оба столбика будут расти до бесконечности, перебирая все возможные комбинации цифр. Понятно также, что правый столбик будет расти вправо (цифры за запятой) тоже до бесконечности, и никогда не наступит такой момент, когда мы не можем уже присоединить ни одной новой цифры.

Так как правый столбик перебирает все возможные цифры за запятой и одновременно растет вправо до бесконечности, то в нем содержатся:

а) при потенциальной бесконечности – все рациональные приближения к иррациональным числам данной области;

б) а при актуальной бесконечности – все собственно иррациональные числа данной области.

Это сопоставление не дает нумерации действительных чисел данной области натуральными числами: мы можем сказать, что первым действительным числом будет 0,000..., но мы не можем сказать, какое будет второе действительное число.

Однако это сопоставление – и без всякой нумерации! – показывает, что КОЛИЧЕСТВО элементов во множестве натуральных чисел и в континууме области между 0 и 1 – что это количество элементов одинаково.

Разумеется, что здесь мы установили независимое соответствие между «счетным множеством» и «континуумом». Как я уже говорил, независимое соответствие между бесконечными множествами (для определения количества их элементов) можно установить всегда, поэтому само по себе это сопоставление особой ценности не имеет; оно имеет ценность только как опровержение канторовских мифов и для демонстрации их логических ошибок.

Ошибка кантористов в данном случае состоит в неспособности отличить нумерацию от сопоставления (с целью определения «мощности» множества). Кантористы считают, что раз нельзя перенумеровать, то это из-за того, что количество элементов больше. Но на самом деле количество элементов одинаково (в той мере, в какой вообще можно говорить о количестве элементов бесконечных множеств), а перенумеровать элементы нельзя по совсем другой причине: потому что количество знаков в каждой строчке правого столбика бесконечно, и эти строчки НЕ МОГУТ быть сгенерированы по линейному алгоритму – одна строчка за другой. Их приходится генерировать по нелинейному алгоритму – такому, который идет одновременно к двум бесконечностям: к бесконечности количества элементов «вниз» и к бесконечности самого элемента «вправо».

При дальнейшем анализе текстов самого Кантора (а также его последователей) всегда нужно иметь перед глазами эту картину и всегда четко отличать:

– зависимое соответствие от независимого; и

– нумерацию элементов от сопоставления их для определения их количества.

Теперь мы можем вернуться к тексту Кантора:

§1

Так как два непрерывных образа одинакового числа измерений можно однозначно и полностью отобразить друг на друга при помощи аналитических функций, то для поставленной нами цели (а именно: доказать возможность однозначного и полного отображения образов различного числа измерений) всё сводится, как легко видеть, к доказательству следующей теоремы:⁷

(А). «Если $x_1, x_2, \dots, x_n$ – n независимых друг от друга действительных переменных величин, каждая из которых может принимать все значения, которые ≥ 0 и ≤ 1 , а t – некоторая другая переменная с той же областью изменения ($0 \leq t \leq 1$), то величину t можно так поставить в соответствие системе n величин $x_1, x_2, \dots, x_n$, что всякому определенному значению t будет соответствовать определенная система значений $x_1, x_2, \dots, x_n$ и, наоборот, каждой определенной системе значений $x_1, x_2, \dots, x_n$ будет соответствовать определенное значение t ».

⁷ В.Э. 2013-02-13: Я не буду подробно комментировать эти теоремы Кантора, так как они не представляют для нас практически никакого интереса: и без них ясно, что, пользуясь понятием независимого соответствия, можно это соответствие установить между любыми бесконечными множествами. Следующим объектом нашего пристального внимания станет то место, где Кантор начнет утверждать, что это якобы невозможно.

Тогда в качестве следствия этой теоремы получается другая теорема, которую мы и имеем в виду:

(В). «Непрерывное n -мерное многообразие можно однозначно и полно отобразить на непрерывное многообразие одного измерения; два непрерывных многообразия, одно из которых n , а другое m измерений, где $n \leq m$, имеют одинаковую мощность; элементы непрерывного n -мерного многообразия можно однозначно определить при помощи одной-единственной непрерывной действительной координаты t , но их можно также определить однозначно и полностью при помощи системы m непрерывных координат $t_1, t_2, \dots, t_n$ ».

§2

К доказательству теоремы (А) мы приходим из известной теоремы, что всякое иррациональное число $e \geq 0$ можно вполне определенным образом представить в форме бесконечной цепной дроби

$$e = \frac{1}{\alpha_1 + \frac{1}{\alpha_2 + \frac{1}{\ddots + \frac{1}{\alpha_v + \ddots}}}} = (\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_v, \dots),$$

где α_v , – целые положительные рациональные числа.

Каждому иррациональному числу $e \geq 0$ соответствует определенная бесконечная последовательность положительных целых чисел i , наоборот, всякая такая последовательность определяет некоторое иррациональное число $e \geq 0$.

Если теперь $e_1, e_2, \dots, e_n$ – n независимых друг от друга переменных величин, каждая из которых может принимать все иррациональные числовые значения интервала $(0 \dots 1)$, причем каждое из них берется только один раз, то полагаем

$$\begin{aligned} e_1 &= (\alpha_{1,1}, \alpha_{1,2}, \dots, \alpha_{1,v}, \dots), \\ &\vdots \\ e_\mu &= (\alpha_{\mu,1}, \alpha_{\mu,2}, \dots, \alpha_{\mu,v}, \dots), \\ &\vdots \\ e_n &= (\alpha_{n,1}, \alpha_{n,2}, \dots, \alpha_{n,v}, \dots), \end{aligned}$$

Эти n иррациональных чисел однозначно определяют $n+1$ -е иррациональное число $0 < d < 1$, а именно

$$d = (\beta_1, \beta_2, \dots, \beta_v, \dots),$$

если между числами α и β ввести следующее соотношение:

$$\beta_{(v+1)n+\mu} = \alpha_{\mu, v} \begin{cases} \mu = 1, 2, \dots, n, \\ v = 1, 2, \dots \text{ до бесконечности.} \end{cases} \quad (1)$$

Но и, обратно, если мы исходим из иррационального числа $0 < d < 1$, то оно определяет последовательность чисел β_v , а через (1) и последовательность чисел $\alpha_{\mu,v}$, т.е. d однозначно определяет систему n иррациональных чисел $e_1, e_2, \dots, e_n$. Из этого соображения сразу же получается следующая теорема:

(С). «Если $e_1, e_2, \dots, e_n$ – независимые друг от друга переменные величины, каждая из которых может принимать все иррациональные значения из интервала $(0 \dots 1)$, и d – другая переменная величина, принимающая те же самые значения, то величину d и систему n величин $e_1, e_2, \dots, e_n$ можно сопоставить друг с другом однозначно и полностью».

§3

После того как в предыдущем параграфе доказана теорема (С), нам нужно теперь доказать такую теорему:

(D). «Переменную величину e , которая может принимать все иррациональные значения, можно однозначно отобразить на переменную x , принимающую все действительные, т.е. рациональные и иррациональные, значения, которые ≥ 0 и ≤ 1 , так что всякому иррациональному значению $0 < e < 1$ соответствует одно и только одно действительное значение $x \begin{matrix} \leq \\ \geq \end{matrix} 0$ и, обратно, каждому действительному значению x соответствует некоторое иррациональное значение e ».

Действительно, как только теорема (D) доказана, так в соответствии с нею представляем себе $n + 1$ переменных величин, обозначенных в §2 через $e_1, e_2, \dots, e_n$ и d , сопоставленными однозначно и полно с другими переменными $x_1, x_2, \dots, x_n$ и t , где каждая из последних переменных принимает без ограничения всякое действительное значение, которое ≥ 0 и ≤ 1 . Так как между переменной d и системой n переменных $e_1, e_2, \dots, e_n$ из §2 однозначное и полное соответствие уже установлено, то тем самым получаем однозначное и полное соответствие между непрерывной переменной t и системой n непрерывных переменных $x_1, x_2, \dots, x_n$, а тем справедливость теоремы (A) оказывается установленной.

Поэтому в последующем нам нужно заняться лишь доказательством теоремы (D). С этой целью для краткости можно воспользоваться простой символикой, которую мы теперь опишем.

Под линейным многообразием действительных чисел будем понимать всякое вполне определенное многообразие отличных друг от друга, т.е. не равных, действительных чисел, так что одно и то же число входит в линейное многообразие в качестве элемента не более одного раза.

Все действительные переменные, которые будут рассматриваться в настоящем исследовании, таковы, что областью изменения каждой из них, т.е. многообразием значений, которые они могут принимать, является заданное линейное многообразие; поэтому далее эту молчаливо принимаемую предпосылку мы не будем выделять особо. О двух таких переменных a и b мы будем говорить, что они не имеют никакой связи, если никакое из значений a не может быть равным какому-либо значению b ; т.е. когда придется говорить, что a и b не связаны, то это означает, что два многообразия значений, которые могут принимать переменные a и b , не имеют общих элементов.⁸

Если имеется конечная или бесконечная последовательность $a', a'', a''', \dots, a^{(v)}, \dots$ вполне определенных переменных или констант, которые попарно не имеют никакой связи, то можно определить переменную a тем, что область ее изменения получается из объединения областей изменения у $a', a'', a''', \dots, a^{(v)}, \dots$; обратно, заданную переменную a можно разными способами разложить на другие переменные $a', a'', \dots$, которые попарно не имеют никакой связи. В обоих случаях отношение переменной a к переменным $a', a'', a''', \dots, a^{(v)}, \dots$ мы выражаем следующей формулой:

$$a \equiv \{a', a'', \dots, a^{(v)}, \dots\}.$$

Поэтому для справедливости этой формулы нужно: 1) чтобы всякое значение, которое может принимать какая-либо из переменных $a^{(v)}$, было вместе с тем значением переменной a ; 2) чтобы всякое значение, которое может принимать a , принималось одной и только одной из величин $a^{(v)}$. Для пояснения этой формулы пусть, например, ϕ – переменная, которая может принимать все рациональные числовые значения ≥ 0 и ≤ 1 , e – переменная, могущая принимать все иррациональные числовые значения из интервала $(0 \dots 1)$, и, наконец, x – переменная, могущая принимать все действительные, рациональные и иррациональные числовые значения, которые ≥ 0 и ≤ 1 ; тогда

$$x = \{ \phi, e \}.$$

Если a и b – две такие переменные величины, что их можно однозначно и полно отобразить друг на друга, другими словами, если области их значений имеют одинаковую мощность, то мы будем называть a и b эквивалентными друг другу и выражать это одной из двух формул

$$a \sim b \text{ или } b \sim a.$$

В соответствии с этим определением эквивалентности двух переменных величин легко получаем, что $a \sim a$ и, далее, что если $a \sim b$ и $b \sim c$, то всегда $a \sim c$.

⁸ Два многообразия M и N или не имеют никакой связи, а именно когда они не имеют никакого общего элемента, принадлежащего им, или же они связаны при помощи определенного третьего многообразия P , а именно при помощи многообразия их общих элементов [«пересечения» M и N].

В различных местах данного исследования будет применяться нижеследующая теорема, доказательство которой из-за его простоты можно опустить:

(Е). «Если $a', a'', \dots, a^{(v)}, \dots$ – конечная или бесконечная последовательность переменных или констант, которые попарно не имеют никакой связи, и $b', b'', \dots, b^{(v)}, \dots$ – другая последовательность, обладающая тем же свойством, причем каждой переменной $a^{(v)}$ первой последовательности соответствует определенная переменная $b^{(v)}$ другой и эти соответствующие переменные всегда эквивалентны друг другу, т.е. $a^{(v)} \sim b^{(v)}$, то всегда

$$a \sim b,$$

где

$$a \equiv \{a', a'', \dots, a^{(v)}, \dots\}$$

и

$$b \equiv \{b', b'', \dots, b^{(v)}, \dots\}.$$

§4

Наше исследование доведено теперь до того пункта, что нам осталось лишь доказать теорему (D) из §3. Для достижения этой цели мы исходим из того, что все рациональные числа, которые ≥ 0 и ≤ 1 , можно записать в форме простой бесконечной последовательности

$$\varphi_1, \varphi_2, \varphi_3, \dots, \varphi_v, \dots$$

с общим членом φ_v . Наиболее просто это можно сделать так. Если p/q неприводимая форма некоторого рационального числа, которое ≥ 0 и ≤ 1 , где, следовательно, p и q – целые неотрицательные числа с наибольшим общим делителем, равным 1, то полагаем $p + q = N$. Тогда всякому числу p/q соответствует определенное целочисленное положительное значение N и, наоборот, такому значению N всегда соответствует лишь конечное число чисел p/q . Если теперь числа p/q представить в форме такой последовательности, что числа, отвечающие меньшим значениям N , предшествуют тем, которые отвечают большим значениям N , а числа с одним и тем же значением N расположены по их величине – большие после меньших, то всякое число p/q будет расположено во вполне определенном месте простой бесконечной последовательности, общий член которой можно обозначить через φ_v . Но эту же теорему можно получить из доказанной мною в свое время⁹ теоремы, по которой совокупность (ω) всех действительных алгебраических чисел можно представить в форме бесконечной последовательности

$$\omega_1, \omega_2, \dots, \omega_v, \dots$$

с общим членом ω_v . Действительно, это свойство совокупности (ω) переносится на совокупность всех рациональных чисел, которые ≥ 0 и ≤ 1 , так как это многообразие является частью предыдущего.

Пусть теперь e – переменная, входящая в теорему (D), принимающая все действительные числовые значения из интервала $(0 \dots 1)$, за исключением чисел φ_v . Берем, далее, в интервале $(0 \dots 1)$ какую-либо бесконечную последовательность иррациональных чисел ε_v , удовлетворяющих лишь тому условию, что $\varepsilon_v < \varepsilon_{v+1}$ и $\lim \varepsilon_v = 1$, например $\varepsilon_v = 1 - \sqrt{2} / 2^v$.

Обозначим через f переменную, которая может принимать все действительные значения из интервала $(0 \dots 1)$, за исключением значений ε_v , а через g – другую переменную, которая принимает все действительные значения из интервала $(0 \dots 1)$, за исключением ε_v и φ_v .

Мы утверждаем, что

$$e \sim f.$$

Действительно, в обозначениях §3

$$e \equiv \{g, \varepsilon_v\}, \quad f \equiv \{g, \varphi_v\},$$

а так как $g \sim g$, $\varepsilon_v \sim \varphi_v$, то по теореме (Е) заключаем, что

$$e \sim f.$$

Поэтому подлежащая доказательству теорема (D) сводится к такой теореме:

(F). «Переменная f , которая может принимать все значения из интервала $(0 \dots 1)$, за исключением значений заданной последовательности ε_v , удовлетворяющей тем условиям, что $\varepsilon_v < \varepsilon_{v+1}$ и $\lim \varepsilon_v = 1$ при $v = \infty$, может быть однозначно и полностью сопоставлена переменной x , принимающей все значения ≥ 0 и ≤ 1 ; другими словами, $f \sim x$ ».

⁹ Über eine Eigenschaft des Inbegriffes aller reellen algebraischen Zahlen. – J. reine und angew. Math., Bd. 77, S. 258 f. [здесь I.2]. В.Э.: А в Веканопедии: <http://ve-poti.narod.ru/B051.PDF>.

§5

Доказательство теоремы (F) мы основываем на следующих теоремах.

(G). «Если y – переменная, принимающая все значения из интервала $(0 \dots 1)$, за исключением 0, а x – переменная, принимающая все без исключения значения из интервала $(0 \dots 1)$, то

$$y \sim x.$$

Доказательство этой теоремы (G) наиболее просто [?] ¹⁰ получается из рассмотрения приведенной кривой, абсциссы которой начиная с 0 обозначены через x , а ординаты – через y . Эта кривая состоит из бесконечного числа параллельных друг другу, становящихся бесконечно малыми при бесконечном возрастании v отрезков

$$ab, a'b', \dots, a^{(v)}b^{(v)}, \dots$$

и изолированной точки c , к которой эти отрезки приближаются асимптотически. При этом концевые точки $a, a', \dots, a^{(v)}, \dots$ считаются принадлежащими кривой, а концевые точки $b, b', \dots$, напротив, рассматриваются как исключенные из нее.

Входящие в эту фигуру длины таковы:

$$Op = pc = 1,$$

$$Ob = bp = Oa = \frac{1}{2},$$

$$a^{(v)}d^{(v)} = d^{(v)}b^{(v)} = b_{v-1}b_v = 1/2^{v+1}.$$

Легко убедиться, что когда абсцисса x принимает все значения от 0 до 1, ордината y получает все эти же значения, за исключением единственного значения 0.

После того как таким путем доказана теорема (G), мы при помощи формул преобразования сразу же получаем такое обобщение теоремы (G):

(H). «Переменная z , могущая принимать все значения из интервала $(\alpha \dots \beta)$, $\alpha \geq \beta$, за исключением концевых значений α , эквивалентна переменной u , принимающей все без исключения значения из того же самого интервала».

Отсюда мы приходим к следующей теореме:

(J). «Если w – переменная, принимающая все значения из интервала $(\alpha \dots \beta)$, за исключением обоих концов α и β , а u – та же самая переменная, что и в теореме (H), то

$$w \sim u.$$

Действительно, пусть γ – какое-либо значение между α и β . Введем четыре новых переменных w', w'', u' и z .

Пусть z – та же самая переменная, что и в (H); w' принимает все значения из интервала $(\alpha \dots \beta)$, за исключением обоих концов α и β ; w'' принимает все значения из интервала $(\gamma \dots \beta)$, за исключением концевых значений β ; пусть, наконец, u'' – переменная, принимающая все значения из интервала $(\gamma \dots \beta)$, включая концевые значения.

Тогда

$$w \equiv \{w', w''\}, \quad z \equiv \{w', u''\}.$$

Но по теореме (H) имеем

$$w'' \sim u'';$$

отсюда заключаем, что

$$w \sim z.$$

Но по теореме (H) имеем и

$$z \sim u;$$

следовательно, получаем $w \sim u$, что и доказывает теорему (J).

Теперь теорему (F) можно доказать так.

Сохраняя за переменными f их значения, указанные в теореме (F), введем вспомогательные переменные

$$f', f'', \dots, f^{(v)}, \dots$$

и

$$x'', x^{IV}, \dots, x^{(2v)}, \dots,$$

¹⁰ В.Э.: Вопросительный знак вставлен Медведевым.

где f' – переменная, принимающая все значения из интервала $(0 \dots \varepsilon_1)$, за исключением концевых значений ε_1 ; $f^{(v)}$ при $v > 1$ – переменная, принимающая все значения из интервала $(\varepsilon_{v-1} \dots \varepsilon_v)$, за исключением обоих концов ε_{v-1} и ε_v ; $x^{(2v)}$ – переменная, принимающая все без исключения значения из интервала $(\varepsilon_{v-1} \dots \varepsilon_v)$.

Если мы присоединим к переменным $f', f'', \dots, f^{(v)}, \dots$ еще постоянное число 1, то получим, что все эти величины, взятые вместе, имеют ту же область изменения, что и f , т.е.

$$f \equiv \{f', f'', \dots, f^{(v)}, \dots, 1\}$$

Точно так же убеждаемся, что

$$x \equiv \{f', x'', f''', x^{IV}, \dots, f^{(2v-1)}, x^{(2v)}, \dots, 1\}.$$

Но по теореме (J)

$$f^{(2v)} \sim x^{(2v)};$$

далее,

$$f^{(2v-1)} \sim f^{(2v-1)}; 1 \sim 1.$$

Поэтому по теореме (E) из §3

$$f \sim x,$$

что и требовалось доказать.

§6

Теперь я хочу дать более краткое доказательство теоремы (D); одним только им я не ограничился потому, что вспомогательные теоремы (F), (G), (H), (J), использованные при усложненном доказательстве, интересны сами по себе.

Как и ранее, под x мы понимаем переменную, принимающую все действительные значения из интервала $(0 \dots 1)$, включая концевые значения, под e – переменную, получающую лишь иррациональные значения из интервала $(0 \dots 1)$; требуется доказать, что $x \sim e$.

Рациональные числа ≥ 0 и ≤ 1 мы мыслим, как и в §4, в форме последовательности с общим числом φ_v , где v пробегает последовательность чисел 1, 2, 3, ... Далее, берем произвольную бесконечную последовательность отличных друг от друга иррациональных чисел интервала $(0 \dots 1)$; пусть общим членом этой последовательности будет η_v (например, $\eta_v = \sqrt{2} / 2^v$).

Под h понимается переменная, принимающая все значения из интервала $(0 \dots 1)$, за исключением φ_v и η_v .

Тогда в соответствии с введенной в §3 символикой

$$x \equiv \{h, \eta_v, \varphi_v\} \quad (1)$$

и

$$e \equiv \{h, \eta_v\}$$

Последнюю формулу мы можем записать и так:

$$e \equiv \{h, \eta_{2v-1}, \eta_{2v}\}. \quad (2)$$

Если теперь заметим, что

$$h \sim h, \eta_v \sim \eta_{2v-1}, \varphi_v \sim \eta_{2v},$$

и применим к формулам (1) и (2) теорему (E) из §3, то получим

$$x \sim e,$$

что и требовалось доказать.

§7

Теперь возникает соображение применить для доказательства теоремы (A) вместо использованных нами цепных дробей форму представления чисел в виде десятичных дробей. Хотя могло бы показаться, что этот путь привел бы к цели быстрее, тем не менее на нем возникает некоторая трудность, на которую я хочу обратить здесь внимание; она явилась причиной того, что я в этом исследовании отказался от применения десятичных дробей.

Если, например, имеются две переменные x_1 и x_2 и мы положим

$$x_1 = \frac{\alpha_1}{10} + \frac{\alpha_2}{10^2} + \dots + \frac{\alpha_v}{10^v} + \dots,$$

$$x_2 = \frac{\beta_1}{10} + \frac{\beta_2}{10^2} + \dots + \frac{\beta_v}{10^v} + \dots$$

с условием, что числа α_v, β_v являются целыми числами ≥ 0 и ≤ 9 и не принимают, начиная с некоторого v , всё время значение 0 (за исключением того случая, когда x_1 или x_2 сами равны нулю), то эти представления переменных x_1 и x_2 будут однозначными всегда, т.е. x_1 и x_2 определяют бесконечные последовательности чисел α_v и β_v и наоборот. Если теперь из x_1 и x_2 мы образуем число

$$t = \frac{\gamma_1}{10} + \frac{\gamma_2}{10^2} + \dots + \frac{\gamma_v}{10^v} + \dots,$$

положив

$$\gamma_{2v-1} = \alpha_v, \quad \gamma_{2v} = \beta_v, \quad v = 1, 2, \dots,$$

то получим тем самым однозначное [взаимно однозначное] соответствие между системой x_1, x_2 и переменной t , ибо к заданному значению t приводит лишь единственная система значений x_1, x_2 . Однако переменная t принимает – и это является подчеркиваемым здесь обстоятельством – не все значения из интервала $(0 \dots 1)$; она ограничена в своей изменчивости, тогда как на x_1 и x_2 в этом интервале никаких ограничений не накладывается.

Все значения суммы ряда

$$\frac{\gamma_1}{10} + \frac{\gamma_2}{10^2} + \dots + \frac{\gamma_v}{10^v} + \dots,$$

у которых, начиная с некоторого $v > 1$, все γ_{2v-1} или все γ_{2v} имеют значение нуль, должны рассматриваться как исключенные из области переменной t , ибо они сводились бы к исключенным, а именно к конечным, десятичным представлениям.

§8

После того как в предшествующих параграфах задуманное исследование доведено до конца, в заключение можно сделать несколько общих замечаний. Теорема (А), а тем самым и теорема (В) могут быть обобщены до предложения, в соответствии с которым и непрерывные многообразия бесконечно большого числа измерений имеют ту же мощность, что и непрерывное многообразие одного измерения; однако это обобщение существенно связано с одним допущением, а именно что бесконечное число измерений само образует многообразие, имеющее мощность последовательности целых положительных чисел.

Здесь вместо (А) выступает такая теорема:

(А'). «Если $x_1, x_2, \dots, x_\mu, \dots$ – просто бесконечная последовательность независимых друг от друга переменных действительных величин, каждая из которых может принимать все значения, которые ≥ 0 и ≤ 1 , а t – другая переменная с той же областью изменения ($0 \leq t \leq 1$), то величину t можно однозначно и полностью поставить в соответствие системе бесконечно многих величин $x_1, x_2, \dots, x_\mu, \dots$ ».

При помощи теоремы (D) из §3 эта теорема сводится к следующей:

(С'). «Если $e_1, e_2, \dots, e_\mu, \dots$ – бесконечная последовательность независимых друг от друга переменных величин, каждая из которых может принимать все иррациональные числовые значения из интервала $(0 \dots 1)$, а d – другая иррациональная переменная с той же областью изменения, то величину d можно однозначно и полностью поставить в соответствие системе бесконечно многих величин $e_1, e_2, \dots, e_\mu, \dots$ »

Наиболее простое доказательство теоремы (С') получается, если, применяя разложения в цепные дроби, положить, как в §2,

$$e_\mu = (\alpha_{\mu,1}, \alpha_{\mu,2}, \dots, \alpha_{\mu,v}, \dots), \quad \mu = 1, 2, \dots,$$

$$d = (\beta_1, \beta_2, \dots, \beta_\lambda, \dots),$$

а между целыми положительными числами α и β установить связь

$$\alpha_{\mu,v} = \beta_\lambda,$$

где

$$\lambda = \mu + (\mu + v - 1)(\mu + v - 2) / 2.$$

Действительно, как легко показать, функция $\mu + \frac{1}{2}(\mu + v - 1)(\mu + v - 2)$ обладает тем замечательным свойством, что она представляет все целые положительные числа и причем

каждое из них только один раз, когда у нее μ и ν независимо друг от друга пробегают всякое положительное целочисленное значение.¹¹

Одновременно теоремой (А'), по-видимому, достигается тот предел, до которого возможно обобщение теоремы (А) и ее следствий.

Поскольку на этом пути для чрезвычайно богатой и обширной области многообразий получается то свойство, что эти многообразия можно однозначно и полно отобразить на ограниченную непрерывную прямую или часть ее (под частью линии понимается всякое многообразие точек, содержащихся в ней), то возникает вопрос о том, как ведут себя в отношении мощности различные части непрерывной прямой линии, т.е. различные мыслимые в ней бесконечные многообразия точек. Если мы освободим эту проблему от ее геометрического одеяния и, как это уже сделано в §3, будем понимать под линейным многообразием действительных чисел всякую мыслимую совокупность бесконечно многих отличных друг от друга чисел, то спрашивается: на сколько и на какие классы распадаются линейные многообразия, если отнести в один и тот же класс многообразия одинаковой мощности, а многообразия различной мощности – в различные классы? При помощи некоторого метода индукции, в изложение которого мы не будем входить здесь подробнее, получается теорема, что число классов линейных многообразий, получаемых в соответствии с этим принципом разбиения, является конечным и даже равным двум.^{12 13}

Сообразно с этим линейные многообразия состояли бы из двух классов,¹⁴ из которых первый включает в себя все многообразия, которые можно привести к виду *functio ips. v* (где v пробегает все целые положительные числа), тогда как второй охватывает все те многообразия, которые сводятся к виду *functio ips. x* (где x может принимать все действительные значения ≥ 0 и ≤ 1).¹⁵ Поэтому соответственно этим двум классам у бесконечных линейных многообразий получились бы лишь две мощности.

Точное исследование этого вопроса мы откладываем до другого раза.

¹¹ Э. Цермело: А именно: для всякого фиксированного значения суммы индексов $\sigma = \mu + \nu$ значениям

$$\mu = 1, 2, \dots, \sigma - 1$$

и

$$\nu = \sigma - 1, \sigma - 2, \dots, 1$$

соответствуют последовательные значения

$$\lambda = \frac{(\sigma - 1)(\sigma - 2)}{2} + 1, \quad \frac{(\sigma - 1)(\sigma - 2)}{2} + 2, \quad \dots, \quad \frac{\sigma(\sigma - 1)}{2},$$

причем всякое число между $(\sigma - 1)(\sigma - 2)/2$ и $\sigma(\sigma - 1)/2$ принимается функцией λ в точности один раз. Следовательно, всякому фиксированному значению $\mu + \nu$ всегда соответствует определенный частичный отрезок, ограниченный двумя следующими друг за другом треугольными числами, а потому всем парам значений μ, ν с $\mu + \nu \leq \sigma$ соответствует целый отрезок $\lambda \leq \sigma(\sigma - 1)/2$.

¹² Э. Цермело: Здесь Кантор впервые высказывает предположение, что линейному континууму соответствует «вторая мощность» – канторовская «гипотеза континуума».

¹³ В.Э. 2013-02-13: Если мы последовательно придерживаемся независимого соответствия, то существует только один класс бесконечных множеств. Если мы придерживаемся зависимого соответствия, то классов бесконечно много – сколько различий в неопределенностях типа ∞/∞ можно раскрыть по правилу Лопиталя, столько и классов бесконечностей. Если признаком класса считать не возможность сопоставления элементов по их количеству, а возможность или невозможность линейно пронумеровать их, то классов ДВА – такие, в которых линейная нумерация возможна из-за конечности числа характеристик, и такие, в которых она невозможна из-за бесконечности характеристик элементов.

¹⁴ Что эти два класса действительно различны, вытекает из теоремы, установленной в работе, которая указала в §2 [здесь 1.2], согласно которой если предложена закономерная бесконечная последовательность $\omega_1, \omega_2, \dots, \omega_n, \dots$, то во всяком заданном интервале $(\alpha \dots \beta)$ всегда можно найти числа, не входящие в заданную последовательность.

¹⁵ Ф.А. Медведев: *functio ips.* – словообразование, введенное Кантором для характеристики того, что рассматриваемое множество можно поставить во взаимно однозначное соответствие непосредственно с множеством натуральных чисел или с множеством всех действительных чисел отрезка $[0, 1]$. Оно дословно означает «функция самого». Это словообразование не прижилось.

Примечание Эрнста Цермело

В этой второй работе по теории множеств,¹⁶ вершиной которой является общее понятие «мощности», ставится и решается задача сравнения друг с другом «непрерывных многообразий» любого числа «измерений» в отношении их мощности. Здесь Кантору удалось получить тот (тогда еще парадоксальный) результат, что все такие многообразия любого конечного и даже (счётно) бесконечного числа измерений имеют одинаковую мощность, а именно что они все эквивалентны множеству всех действительных чисел (замкнутого) единичного отрезка, и отсюда он заключил наряду с прочим, что понятие «размерности» должно опираться прежде всего на непрерывное (и даже взаимно непрерывное) отображение многообразий друг на друга.

Доказательство того, что точки квадрата, например, можно поставить во взаимно однозначное соответствие с точками отрезка, автор основывает здесь на разложении (однозначном) в цепные дроби действительных иррациональных чисел и образовании (механическом) из двух таких разложений

$$(\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \dots) \text{ и } (\beta_1, \beta_2, \beta_3, \dots)$$

третьего разложения

$$(\alpha_1, \beta_1, \alpha_2, \beta_2, \alpha_3, \beta_3, \dots).$$

Но из этого пока получается только эквивалентность иррациональных точечных множеств, содержащихся в квадрате и соответственно в отрезке. Чтобы распространить этот результат и на (замкнутые) точечные множества (включая рациональные точки), Кантор пользуется здесь несколько усложненной системой вспомогательных теорем, в каждой из которых нужна счётность рациональных точек, содержащихся в отрезке.

«Об одном элементарном вопросе учения о многообразиях»

В статье под названием «Об одном свойстве совокупности всех действительных алгебраических чисел» (J. reine und angew. Math., 1874, Bd. 77, S. 258) [здесь 1.2] содержится первое доказательство теоремы, что существуют бесконечные многообразия, которые нельзя взаимно однозначно отобразить на совокупность всех конечных целых чисел 1, 2, 3, ..., ν , ... или, как я обычно выражаюсь, которые не имеют мощности последовательности чисел 1, 2, 3, ... Из доказанного там в §2 непосредственно следует, что, например, совокупность всех действительных чисел произвольного интервала ($\alpha \dots \beta$) нельзя представить в форме последовательности

$$\omega_1, \omega_2, \dots, \omega_\nu, \dots^{17}$$

Можно, однако, получить значительно более простое доказательство этой теоремы, не зависящее от рассмотрения иррациональных чисел.

Действительно, если m и w — два каких-либо исключаяющих друг друга признака (*Charaktere*), то рассматриваем совокупность M элементов

¹⁶ Ф.А. Медведев: Здесь она является третьей. (В.Э.: Медведев по сравнению с подборкой Цермело присоединил впереди еще работу Кантора о тригонометрических рядах, поэтому у него нумерация сдвинулась на одну единицу).

¹⁷ В.Э. 2013-02-13: Теперь, когда мы в §0 оговорили различие между нумерацией и сопоставлением и провели там сопоставление натуральных чисел с действительными числами области $0 \dots 1$, уясним еще раз ситуацию. В той работе, на которую Кантор здесь ссылается (статья В051), он НЕ доказал, что в интервале больше чисел, чем в «счётном множестве». Что же касается утверждения «нельзя представить в форме последовательности $\omega_1, \omega_2, \dots, \omega_\nu, \dots$ », то опять же нужно уточнить, что оно, собственно, означает. Действительные числа интервала действительно нельзя сгенерировать (или перебрать) по линейному алгоритму, и в этом смысле и вправду «нельзя представить...». Но в §0 на каждом шаге сопоставления (в каждой из последовательных таблиц) каждому (рациональному) приближению к иррациональному числу сопоставлено одно натуральное число. Это число меняется от таблицы к таблице для приближений какого-то одного конкретного иррационального числа, например, для дробной части π . Но оно, это натуральное число, всё время есть, и никогда не наступит такой момент, когда для очередного приближения дробной части π вдруг не будет соответствующего натурального числа. Поэтому — если мы вообще допускаем актуальную бесконечность и пользуемся ею — то «в предельном случае» пределу всех приближений (т.е. самой дробной части π) будет тоже соответствовать натуральное число. Оно будет (актуально!) бесконечно большим, но оно БУДЕТ соответствовать ей. И в этом смысле интервал МОЖНО «представить в форме последовательности $\omega_1, \omega_2, \dots, \omega_\nu, \dots$ ».

$$E = (x_1, x_2, \dots, x_v, \dots),$$

зависящих от бесконечно многих координат $x_1, x_2, \dots, x_v, \dots$, где каждая из этих координат есть m или w . Пусть M – совокупность всех элементов E .

Элементами совокупности M являются, например, три следующие:

$$E^I = (m, m, m, m, \dots),$$

$$E^{II} = (w, w, w, w, \dots),$$

$$E^{III} = (m, w, m, w, \dots).$$

Теперь я утверждаю, что такое многообразие M не имеет мощности последовательности $1, 2, \dots, v, \dots$

Это вытекает из следующей теоремы:

«Если $E_1, E_2, \dots, E_v, \dots$ – какая-либо просто бесконечная последовательность элементов многообразия M , то всегда существует такой элемент E_0 многообразия M , который не совпадает ни с каким E_v ».

Пусть

$$E_1 = (a_{1,1}, a_{1,2}, \dots, a_{1,v}, \dots),$$

$$E_2 = (a_{2,1}, a_{2,2}, \dots, a_{2,v}, \dots),$$

$$\dots\dots\dots$$

$$E_\mu = (a_{\mu,1}, a_{\mu,2}, \dots, a_{\mu,v}, \dots),$$

$$\dots\dots\dots$$

Здесь $a_{\mu,v}$ суть определенно m или w . Определим теперь последовательность $b_1, b_2, \dots, b_v, \dots$ так, чтобы b_v был тоже равен только m или w и отличен от $a_{v,v}$.

Итак, если $a_{v,v} = m$, то $b_v = w$, а если $a_{v,v} = w$, то $b_v = m$.

Если теперь мы рассмотрим элемент¹⁸

$$E_0 = (b_1, b_2, b_3, \dots)$$

многообразия M , то очевидно, что равенство

$$E_0 = E_\mu$$

не может иметь места ни для какого положительного целочисленного значения μ , так как в противном случае для соответствующего μ и для всех целочисленных значений v было бы

$$b_v = a_{\mu,v},$$

а значит, в частности,

$$b_\mu = a_{\mu,\mu},$$

что исключается определением b_v . Из этой теоремы непосредственно следует, что совокупность всех элементов многообразия M нельзя представить в форме последовательности $E_1, E_2, \dots, E_v, \dots$, так как в противном случае мы столкнулись бы с противоречием,¹⁹ что некая вещь E_0 как была бы, так и не была бы элементом многообразия M .

Это доказательство замечательно²⁰ не только вследствие его большой простоты, но главным образом потому, что содержащийся в нем принцип можно просто распространить на

¹⁸ **В.Э. 2013-02-14:** Вот рассмотрим этот элемент более пристально, чем это делает Кантор! Элементы $a_{\mu,v}$ принимают только два значения (m и w), поэтому, если v меняется от 1 до некоторого n , то μ в то же время меняется от 1 до 2^n . Если длина E_0 растет до того же n (то есть, достигает длины остальных E_μ), то канторовский диагональный процесс охватывает n элементов E и не охватывает $2^n - n$ элементов. Легко видеть (по правилу Лопиталя), что доля охваченных диагональным процессом элементов среди всех элементов стремится к 0, когда n стремится к бесконечности. Поэтому вывод о том, что E_0 не может быть равен никакому E_μ сделать НЕЛЬЗЯ: E_0 равен одному из тех E_μ , которые не были охвачены диагональным процессом. Это настолько очевидная, настолько грубая ошибка Кантора, что единственный вопрос, который здесь возникает – это: как могли Цермело и все прочие кантористы ему поверить и этого не видеть? Это действительно загадка. Видимо, их взгляд как-то затуманивает то обстоятельство, что индексы v и μ оба растут до бесконечности, а бесконечности эти принимаются равнозначными – как при независимом соответствии. Только в таком случае можно предполагать, что диагональный процесс охватит все E_μ . Бесконечности v и μ принимаются независимыми одна от другой и поэтому одинаковыми. Но они зависимы по самому их определению, они связаны соотношением $n / 2^n$.

¹⁹ **В.Э. 2013-02-14:** Противоречие здесь возникает от предположения, что $2^n = n$ при бесконечности. Логически состоятельный вывод из этого противоречия может быть только один: диагональный процесс НЕ МОЖЕТ охватывать все E_μ .

²⁰ **В.Э. 2013-02-14:** Так что же здесь «доказал» Кантор? Он доказал, что $(2^n > n)$ – вещь до предела тривиальную. Мощность множества с 2^n элементами всегда больше мощности множества с n элементами – при зависимом соответствии. Кантор просто перескочил с принятого им в начале независимого соответствия на соответствие зависимое. А по пути он еще (при своем «диагональном методе») принимал обе эти

общую теорему, что мощности вполне определенных многообразий не имеют максимума или, что то же самое, каждому заданному многообразию L можно сопоставить другое многообразие M , имеющее большую мощность, нежели L .²¹

Пусть, например, L – линейный континуум, хотя бы совокупность всех действительных числовых величин z , которые ≥ 0 и ≤ 1 .

Под M мы понимаем совокупность всех однозначных функций $f(x)$, принимающих лишь два значения 0 и 1, когда x пробегает все действительные значения, которые ≥ 0 и ≤ 1 .²²

Что M не имеет мощности, меньшей мощности континуума L , следует из того, что можно задать подмножества множества M , имеющие ту же мощность, что и L , например, подмножество, состоящее из всех функций, которые для отдельного значения x_0 переменного x имеют значение 1, а для остальных значений x имеют значение 0.

Но M и не имеет мощности, равной мощности континуума L , ибо в противном случае многообразие M можно было бы поставить во взаимно однозначное соответствие с переменным z и M можно было бы так представить в форме однозначной функции двух переменных x и z

$$\varphi(x, z),$$

что при задании частного значения z получался бы некоторый элемент $f(x) = \varphi(x, z)$ многообразия M и, наоборот, всякий элемент $f(x)$ многообразия M получался бы из $\varphi(x, z)$ заданием одного определенного значения z . Но это приводит к противоречию. Действительно, если под $g(x)$ мы будем понимать ту однозначную функцию от x , которая принимает лишь значения 0 или 1 и для каждого значения x отлична от $\varphi(x, x)$, то $g(x)$, с одной стороны, является неким элементом многообразия M , а с другой – не может быть получена из $\varphi(x, z)$ никаким заданием частного значения $z = z_0$, так как $\varphi(z_0, z_0)$ отлична от $g(z_0)$.²³

Тем самым мощность многообразия M ни меньше, ни равна мощности континуума L ; отсюда следует, что она больше, чем мощность у L (ср.: Журнал Крелле, т. 84, с. 242) [здесь I.3].

концепции соответствия одновременно: диагональный процесс охватывает все E_μ (независимое соответствие между v и μ), но в то же время соответствие между n и 2^n установить нельзя (зависимое соответствие). Кантор проявляет просто ослепительные чудеса математического мышления! А Эрнст Цермело, Федор Медведев, Юрий Манин и тысячи других кантористов за ним все эти фокусы повторяют с потрясающей то ли наивностью, то ли слепотой. (Кантору эти фокусы простительны: он был болен и лечился в психиатрической больнице. А вот что нам думать об остальных? (Данная работа Кантора написана в 1890 году; первое лечение его в психиатрической больнице состоялось в 1884 году; в том же 1884 году он начал заниматься «теорией Шекспира–Бэкона»)).

²¹ В.Э. 2013-02-14: Это естественный вывод, когда мы пользуемся зависимым соответствием. Для получения этого вывода не надо было предварительно принимать концепцию независимого соответствия.

²² В.Э. 2013-02-14: Для уяснения того, о чем Кантор здесь говорит, покажем это на примере, когда z не континуум, а простенькое множество из трех величин $\{a, b, c\}$.

x	z	v	M
1	a	0	$f_1(a)=0; f_1(b)=0; f_1(c)=0$
2	b	1	$f_2(a)=0; f_2(b)=0; f_2(c)=1$
3	c		$f_3(a)=0; f_3(b)=1; f_3(c)=0$
4			$f_4(a)=0; f_4(b)=1; f_4(c)=1$
5			$f_5(a)=1; f_5(b)=0; f_5(c)=0$
6			$f_6(a)=1; f_6(b)=0; f_6(c)=1$
7			$f_7(a)=1; f_7(b)=1; f_7(c)=0$
8			$f_8(a)=1; f_8(b)=1; f_8(c)=1$

Множество M всех возможных функций от z при возможных значениях v будет иметь мощность v^z – при зависимом соответствии. В данном примере возможны $2^3 = 8$ функций; каждая функция принимает три значения в зависимости от z . Взаимно однозначное сопоставление элементов M и z невозможно, потому что это зависимое соответствие – M образовано из z .

²³ В.Э. 2013-02-14: В нашем примере функция $g(x)$ образуется из $f_1(a)=0, f_2(b)=0, f_3(c)=0$ (в таблице отмечены красным); $g(x)$ – это $f_x(a)=1; f_x(b)=1; f_x(c)=1$; очевидно, что $x = 8$, диагональный процесс сам по себе никакого противоречия не создает; противоречие появляется у Кантора лишь от того, что он предположил, будто диагональ (красные элементы) охватят все значения x . Мощность множества M больше, чем у множества z , но это элементарное следствие их взаимной зависимости; для того, чтобы этот факт установить, достаточно было просто посчитать v^z и сравнить с z ; не надо было для этого вводить сначала независимое соответствие, уравнивая по мощности все бесконечные множества, потом переходить обратно к зависимому соответствию, проводить диагональный процесс, который не проводится до конца, получать противоречие, неправильно его интерпретировать и делать из него абсурдные выводы...

В «Основах общего учения о многообразиях» (Leipzig, 1883; Math. Ann., Bd. 21) [здесь I.5.5] я уже показал при помощи совершенно другого вспомогательного средства, что мощности не имеют максимума.²⁴ Там даже было доказано, что совокупность всех мощностей, если последние мыслить упорядоченными по их величине, образует «вполне упорядоченное множество», так что для каждой мощности по самой ее природе имеется непосредственно бóльшая, а за всяким бесконечно возрастающим множеством мощностей тоже следует непосредственно бóльшая мощность.²⁵

«Мощности» представляют собой единственное и необходимое обобщение конечных «кардинальных чисел»; они суть не что иное, как актуально бесконечно большие кардинальные числа, и им отвечают те же реальность и определенность, какие присущи конечным кардинальным числам. Разве что закономерные соотношения между ними, соответствующая им «теория чисел», являются несколько иными, нежели в области конечного.

Дальнейшая обработка этого поля – дело будущего.

Примечание Эрнста Цермело

В этой работе впервые дается классическое доказательство того факта, что $2^{\mathfrak{m}} > \mathfrak{m}$ (в записи для кардинальных чисел), при помощи «канторовского диагонального метода». Чтобы применить его вместо $\mathfrak{m} = \aleph_0 = \mathfrak{a}$ к мощности континуума $\mathfrak{c}$, нужно еще доказать, что континуум можно взаимно однозначно отобразить на множество формально различных двоичных дробей, поскольку всякое двоично рациональное число $p/2^n$ имеет не одно, а два двоичных разложения (только с нулями или только с единицами в конце). Но так как сами эти числа, представимые двумя способами, образуют счетное множество, а континуум содержит счетные подмножества, то в той же сокращенной записи получаем

$$\mathfrak{c} = \mathfrak{a} + \mathfrak{c}_1 = \mathfrak{a} + \mathfrak{a} + \mathfrak{c}_1 = \mathfrak{a} + \mathfrak{c} = 2^{\mathfrak{a}} > \mathfrak{a}.$$

Ср. следующую за этой работу I.10, §4.

²⁴ В.Э. 2013-02-14: «Мощности не имеют максимума», когда мы пользуемся понятием зависимого соответствия; все бесконечные мощности одинаковы, если мы пользуемся независимым соответствием. Вся канторовская «шкала алефов» получена ценой того, что он отказался от (первоначально принятого им) независимого соответствия и перешел обратно к зависимому.

²⁵ Э. Цермело: То, что совокупность всех мощностей образует вполне упорядоченную систему (даже если не «множество»), в указанном месте вовсе не «доказано», так как у Кантора еще отсутствует доказательство, что всякое множество можно вполне упорядочить и что поэтому всякая мощность является алефом.