Веданопедия
Сайт:http://ve-poti.narod.ru/.

Статья «Карлис Подниекс»


Карлис Подниекс 7 июня 2004 года. Фото из его личного сайта в Интернете.

Карлис Мартынович Подниекс (Kārlis Podnieks) – преподаватель Латвийского университета, которому 16 февраля 1981 года была преподнесена Веданская теория. Подниекс был **первым** представителем латвийской, советской и мировой науки, которому Веданская теория вообще предлагалась.

Подниекс родился в 1948 году,[1] и в 1981 году ему было 33 года. В 1971 году он окончил Физико-математический факультет Латвийского государственного университета (ЛГУ), в 1979 году защитил кандидатскую диссертацию в Вычислительном центре АН СССР в Москве (советское звание кандидата наук в 1992 году в Латвийской республике нострифицировано в звание доктора математики).

С 1971 года работал в Вычислительном центре ЛГУ (в 1994 году переименованном в Институт математики и информатики ЛУ), был аспирантом, старшим научным сотрудником, заведующим отделом, ведущим исследователем, заведующим лабораторией.

Одновременно с 1973 года был преподавателем и лектором на Физико-математическом факультете ЛГУ (в постсоветское время переименованного в ЛУ), с 1995 года – доцент, с 2001 года – ассоциированный профессор, с 2005 года – профессор. Решением Сената ЛУ от 16 марта 2009 года Компьютерное отделение Физмата было преобразовано в самостоятельный Компьютерный факультет, и Подниекс стал профессором уже не Физмата, а этого новообразованного факультета.

Свое первоначальное отношение к Веданской теории Подниекс в мае 1983 года сформулировал так {CANTO.73}:

> Выдвинутая автором концепция мне кажется симпатичной и достойной дальнейшей разработки. Если смотреть чисто формально, то автор предлагает основать новую отрасль науки, которая своими собственными методами изучала бы алгоритмы мозга. Как назвать эту науку? Автор предлагает название «материалистическая математика». Этим утверждается, что новая отрасль науки на самом деле не новая, а является правильным направлением развития уже существующей науки – математики. Этот тезис мне еще не кажется убедительно доказанным. Не ясно еще до конца, сохранится ли весь теперешний практический потенциал математики, если ее развитие пойдет в предложенном автором направлении. И будет ли эффект, данный переходом на новую концепцию, достаточно чувствительным, чтобы оправдать вложенный в разработку труд. Приведенные автором примеры с системами чисел и теоремой Кантора для традиционно думающего математика не представляются достаточно существенными, чтобы убедить в эффективности выбранного направления.

Это заключение изобилует неточностями и пронизано непониманием Веданской теории. Оно отрицательно, но еще не воинственно отрицательно.

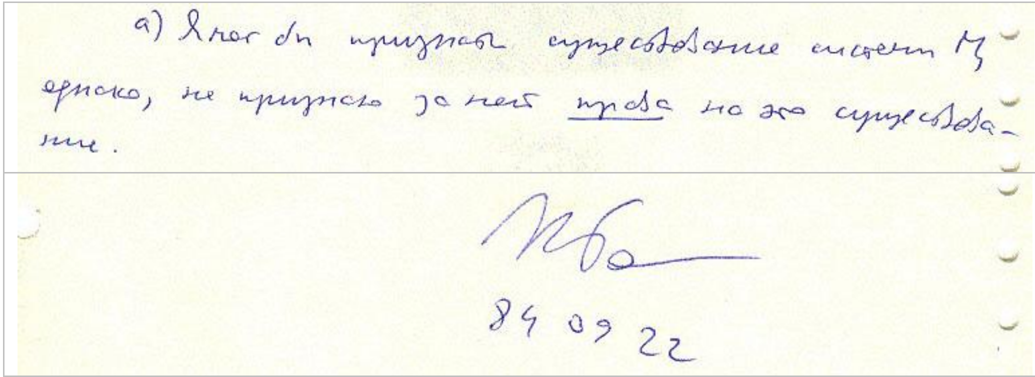
В дальнейшем поведение Подниекса в отношении Веданской теории характеризовалось следующими основными чертами:

[1] Место и точная дата рождения в интернетовских источниках отсутствуют.

1) Полным нежеланием (или неспособностью? – но больше нежеланием, чем неспособностью) **<u>понять</u>** преподносимую ему концепцию, вообще допустить (хотя бы в качестве предположения), что она может быть и **<u>верной</u>**.

2) Подниекс в 1980-х годах тратил много времени на Веданскую теорию, но вся его энергия направлялась <u>НЕ</u> на то, чтобы эту концепцию понять и объективно оценить, а исключючительно на то, чтобы во что бы то ни стало – любыми средствами и способами, в том числе самыми нечистоплотными, – «доказать» ее несостоятельность, «опровергнуть» ее и утвердить свою собственную концепцию (которая заключалась в догматическом применении крайнего математического формализма – более крайнего и более радикального, чем вообще обычный, средний математический формализм).

3) При этом отрицание Веданской теории Подниексом становилось всё более резким и агрессивным; 22 сентября 1984 года им была подписана следующая декларация: «**Я мог бы признать существование системы M,**[2] **однако, не признаю за ней <u>ПРАВА</u> на это существование**» {CANTO2.1153}.



Автограф Подниекса и его подпись под объявлением, что Веданская теория не имеет ПРАВА на существование.

Научная честность порядочного ученого состоит в том, чтобы познать одинаково глубоко альтернативные концепции и потом объективно сравнить их постулаты и следствия с научной точки зрения. Эта научная честность и порядочность у Подниекса отсутствовала полностью. Он никогда не пытался понять и объективно оценить Веданскую теорию, а видел свою «задачу» лишь в том, чтобы ее заведомо отрицать – отрицать ее существование, отрицать ее ПРАВО на существование – и только поучать оппонента с позиций своей собственной концепции.

Разумеется, такая позиция аморальна, а поведение Подниекса представляло собой сплошное нарушение научной этики.

Логически оспорить Веданскую теорию Подниекс не был в состоянии, поэтому он прибегал к демагогии: вместо подлинных тезисов ВТ нападал на выдуманные им самим тезисы с таким видом, будто те принадлежат ВТ, а на ответы не реагировал; на поставленные ему трудные вопросы не отвечал, а потом вел себя так, будто никаких вопросов и не было; критику и объяснения игнорировал, продолжая просто повторять своё.

Вне поля соприкосновения с ВТ Подниекс как ученый себя в общем-то не проявил. На его интернетовских сайтах упоминается только одна теорема, доказанная им в 1974 году во время армейских сборов. Всё остальное – одна лишь преподавательская деятельность, то есть: он был просто школьным учителем – только в высшей школе. Никаких новых концепций, новых теорий, новых идей.

А между тем 16 февраля 1981 года Подниекс (первый в мире!) соприкоснулся с теорией мирового масштаба, фундаментально меняющей все представления о математике – и не только о математике. У Подниекса был исключительный шанс объективно оценить новую теорию, принять ее на вооружение, стать лидером Латвийской школы математиков и прославить ее на весь мир. Тогда он стал бы выдающимся, знаменитым ученым, и не надо было бы мучительно выдумывать, что бы такое написать для очередной публикации, требующейся для аттестации, – тогда научных тем для публикаций и конференций было бы такое количество, что не знаешь, за

[2] Название «Веданская теория» тогда еще не было придумано, и она фигурировала как «Система M» или «Материалистическая математика».

что хвататься сперва. Тогда имя Подниекса вошло бы в историю мировой науки наравне с такими именами как Гильберт, Фреге, Рассел.

Но Подниекс не использовал свой уникальный шанс, и теперь он войдет в историю мировой науки как тупоумный схоласт и догматик, отчаянно и бездарно (но в общем-то безуспешно) сопротивлявшийся научной истине – и войдет он туда только по ЭТОЙ причине, потому что собственных достижений, достаточных для того, чтобы войти в историю, у него нет.

Деятельность Подниекса была исключительно пагубной; его аморальное поведение и антинаучные приемы превратили атмосферу вокруг ВТ из конструктивного сотрудничества и объективного доброжелательства (каковые первоначально ожидались) в жестокую борьбу, конфликты и в конце концов в ругань (так как Валдис Эгле, естественно, не мог согласиться и мириться с такой оценкой Веданской теории и с таким поведением оппонента); заключения и оценки Подниекса повлияли на других латвийских ученых, еще менее знакомых с ВТ и полагавшихся на мнение «авторитетного» Подниекса, в результате чего и было сотворено то «латвийское чудо», которое видно в истории первых десятилетий Веданской теории.

Эта история, пожалуй, – самая позорная страница в истории латвийской науки, и главный ее творец – профессор Карлис Подниекс.

Приложения

Приложение № 1. Из переписки с читательницей Майя Сална

В 1999–2003 годах у меня была очень активная читательница, выступавшая под псевдонимом Майя Сална. Ниже дан небольшой отрывок из переписки с ней, содержащий характеристику Карлиса Подниекса, данную мною в 2002 году. Переписка теперь находится в книге {L-VITA3}, а перевод с латышского выполнен 2012.01.31.

Майя Сална писала после прочтения «Канторианы»:

* * *

2002.02.12

.747. *Вам с этим К. Подниексом действительно не повезло. К тому же я не понимаю его логику, когда он пишет, что Ваша теория не имеет права быть, существовать. Естественно, что это такое издевательство, как если бы у меня кто-нибудь требовал доказать, что я существую в этом мире, и когда я это сделала бы, то велел бы еще доказать, что я имею право существовать в этом мире... Ясно, что он тогда получил бы от меня по башке, ибо заслужил это, но ему это опять было бы выгодно, потому что тогда можно было бы говорить, что человек с такой реакцией уж точно не имеет право существовать на свете, а если и имеет, то только под присмотром психиатров... И что ты такому уродцу поделаешь, если от него зависишь?*

.748. *(Я Вас хорошо понимаю. Кажется, понимаю и то, почему Вы не профессор. Но я на Вашем месте (с Вашими мозгами), понимая эту идиотскую систему, всё же стала бы профессором. Исключительно для того, чтобы не зависеть всю жизнь от всяких дураков, у которых титулы являются пропуском к удобной жизни и мандатом на высокомерное поведение).*

2002.02.26 15:28 вторник
(через 14 дней)

.749. Вы пишете, что Вам трудно понять логику Подниекса, когда он утверждает, что моя теория не имеет права на существование.

.750. Ну, никакой логики же там вообще нет, и утверждение Подниекса настолько тупоумно (не побоимся этого слова), что нам на самом деле там вообще нечего обсуждать.

.751. Скорее всего, он и сам теперь понимает глупость такой «аргументации» и не пытался бы ее всё еще подтверждать и защищать.

.752. Определенная (психологическая) проблема всё же, конечно, существует, если мы желаем объяснить, почему Подниекс (и его друзья) столь категорично отказались вообще рассматривать предположение, что объекты математики являются продуктами мозгового компьютера.

.753. Ясно, что в основе всего лежит Глупость – этот самый типичный атрибут человеческого рода. И всё же: – на уровне обычного быта они же всё-таки не столь глупы (по крайней мере, не выглядят такими). Поэтому как будто требуется еще какое-то дополнительное объяснение.

.754. Я думаю, что огромную роль в этом сыграло Чванство. Люди вдолбили себе в головы, что они Ученые, преподаватели Университета, Кандидаты наук (по теперешнему подразделению – доктора), а напротив их стоит какой-то там дилетант, который в принципе никогда не скажет ничего, что можно было бы принять во внимание. Такова была их изначальная установка, и за нее они держались «до конца»...

.755. На самом деле Подниекс и Кикуст – это типичные латышские парни – со всеми их типичными слабостями. Им нужно было бы в детстве пасти коров, потом пахать землю, косить сено, складывать на стожары и т.д. – и тогда они действительно были бы на своем настоящем месте, и все соседи (в том числе и я) считали бы их вполне разумными и уважаемыми людьми.

.756. А они взялись за совершенно неподходящие для них дела, для которых их способности практически равны нулю. Ну, и там они оказались неспособными ни на что большее, чем сначала, разинув рот, слушать, что им говорит учитель, а потом услышанное тупо повторять, совсем не понимая сколь-нибудь глубоко смысл услышанных слов и пределы этого смысла...

.757. Как бы там ни было, но Подниекс (и его друзья) нанесли Веданской теории и Латвийской науке огромный вред. Речь не только о потерянных годах (хотя и это не мало: на сегодняшний день потеряно уже более двух десятилетий). Но, кроме того, из-за их ограниченности и чванства обсуждение Веданской теории вообще ушло в русло не деловых контактов, а постоянных конфликтов.

.758. Я их «отхлестал» (как я мог не отхлестать, если они вели себя так глупо и если никаких других путей у меня не было: эти «два дурака» загородили всё!), но тем самым следующие, кто читали о Веданской теории, видели уже, что я непрерывно конфликтую, «агрессивен», «издеваюсь над преподавателями Университета» и т.д.

.759. Естественно, что это не способствовало и дальнейшей поддержке Теории. Хотя Майя Куле, Вилнис Заринъш и другие не являются никакими умами мирового масштаба, но я же не искал специально конфликтов с ними и игнорировал бы и забыл бы их не очень высокий интеллект, если бы контакты сложились конструктивными. И конструктивными они наверное могли бы получиться, если бы не было той предыстории конфликтов (которую они видели в «Lase» – и были способными увидеть только это).

.760. Не так уж и трудно угадать, что и как они думали: «Вот, он высмеивает доктора Подниекса, такого же преподавателя Университета, как и мы и наши коллеги...» (Ну, и они, Заринъш, Куле и другие, конечно, такие же «латышские парни и девицы», как Подниекс и Кикуст: Майя Куле тоже на самом деле должна была бы доить коров, а не разглагольствовать о философии; тогда она была бы действительно на своем месте, и та комбинация ограниченности и зазнайства, которую мы видели у Подниекса и Кикуста, ведь не в меньшей мере свойственно также и Куле с остальными, с кем я имел дело).

.761. Но представьте себе, что произошло бы, если бы в начале 1980-х годов Подниекс согласился бы действительно рассмотреть предположение, что математика создана мозговым компьютером, углубился бы в это дело и понял бы это. Конфликты не возникли бы, не было бы этого бесконечного потока издевок и ругани, который начался уже в «Канториане»; вместо этого были бы «положительные отзывы лучших специалистов Латвии» – и тогда эти отзывы, а не та ругань попали бы к Куле и Зариню, к Улманису и Фрейбергам...

.762. Йохан Корин в своей интересной книге «Великий Дух»[3] аллегорически говорит о маленьком камешке, который направляет поток в то или иное русло, и от этого именно здесь, а не в каком-то другом месте, образовывается река с огромными оврагами и размытыми обрывами...

.763. Именно так это в жизни и происходит. «Маленький камешек» мог направить всё в совсем иное русло, – и этим камешком более 20 лет назад был: – Карлис Подниекс.

.764. И, наконец, после потерянного времени и направления всей дискуссии в русло нескончаемых конфликтов, третьим негативным фактором абсурдного поведения Подниекса

[3] Korins Johans. «Dižais Gars». Pseidozinātniska fantāzija. Preses Nams, Rīga, 2000. {L-DIGARS}.

было психологическое влияние на меня. Двадцать лет назад меня эти вопросы математики очень интересовали, и, если бы имели место положительные контакты, отзывчивость, творческая дискуссия, то этот интерес, наверное, еще более усилился бы, и я предался бы всё новым и еще более глубоким делам. Но, если в продолжении почти четверти века нет никого, кто был бы способным тебя понять, и любое прикосновение к этой теме вызывает только ненависть и ругань, то волей-неволей – по законам психологии – человек постепенно «остывает» к такому делу.

.765. Мне теперь не так уже хочется писать о математике – и интерес начинает пропадать, и старость приближается, но, главное: как только «врубаюсь» в русло математики, так сразу наваливается подавляющая всё остальное мысль: «Некому же писать! Кто будет читать?! Нет никого, кто был бы способен это понять!».

.766. Писать себе одному? Но я всё это и так знаю...

.767. В пункте {.748} Вы опять пишете о том, что мне, мол, надо было «стать профессором». Но я всё это много раз уже объяснял. Чтобы «стать профессором» (с целью не зависеть ни от кого), надо было, во-первых, уже заранее предвидеть, что именно так всё повернется и что такая «независимость» будет необходима и будет единственным выходом. Но я этого не предусматривал; совсем наоборот – я ожидал, что люди, ознакомившись с моими аргументами, согласятся, и что всё дальше пойдет гладко, и никакая «независимость» мне не понадобится.

.768. Пока не было Веданской теории (и именно когда мне и надо было бы поступать в те аспирантуры и «защищать» те диссертации), всё это меня просто не интересовало и не было нужно. Когда же Веданская теория появилась, то и тогда первые годы я руководствовался обычным начальным предположением людей: что «все» являются «такими же, как я». Негодяи думают, что все – негодяи; умные – что все умны...

.769. И из такого предположения опять следовало, что никакие диссертации мне не нужны: эти умные окружающие люди ведь и так поймут и будут соответственно поступать!

.770. Только медленно, постепенно я начал понимать, что интеллектуальный уровень латвийских «ученых» чудовищно низок (ср. {.864}). Но тогда уже было поздно что-либо предпринимать в области диссертаций и профессуры...

.771. И, во-вторых, профессор – это означает: учитель (только учитель в высшей школе; т.е. у нас в высшей школе – в некоторых других странах профессорами называют и учителей средних учебных заведений). Но я никогда не хотел работать учителем. Мне эта работа не нравится. Какая связь между Теорией и учительской работой? Почему я обязательно должен быть учителем, если я хочу заниматься Теорией?!

.772. Там же в пункте {.748} Вы говорите также о «праве на удобную жизнь». Многие из тех в моем поколении, кто во времена нашей молодости поступали в аспирантуры и защищали диссертации, действительно делали это в надежде на «удобную жизнь» (например, Майя Куле типично такова), но много было и таких, у кого цели были другие – во всяком случае главные цели. Но лишь немногие из них сегодня могут сказать, что «удобная жизнь» действительно достигнута. О большей части из них можно сказать, что они «просчитались»: профессорам и «ученым» теперь платят мало, и жизнь у них трудна.

.773. Подниекс, я думаю, не принадлежал к «чистым карьеристам» (таким, как Майя Куле); основная цель у него, когда он шел к докторскому званию, всё же была не удобная жизнь, а Наука. Подниекс всегда очень много работал в Университете. (И даже в «Канториане» он регулярно писал такие длинные «полотна», как никто другой, хотя ему за это никто не платил, и в общем-то он не обязан был это делать – особенно уж, если он в мою Теорию не верит).

.774. Итак, Подниекс в основе своей не карьерист, он, так сказать, – «идейный ученый». Но только он переоценил свои умственные силы и способности, отправляясь работать в эту область. Подниекса, скорее, можно было бы сравнить с тем сотрудником Резерфорда, рассказ о котором обошел бесчисленные книги и упоминался уже и в моих.

.775. Резерфорд, знаменитый английский физик новозеландского происхождения, лауреат Нобелевской премии, однажды поздно вечером зашел в свою лабораторию и увидел, что там работает один из его сотрудников.

.776. – Молодой человек, – спросил Резерфорд, – вы всегда так поздно работаете?

.777. – Да! – гордо ответил сотрудник, ожидая похвалы. Но Резерфорд нахмурился и сердито сказал:

.778. – Вполне достаточно работать четыре часа в день. В остальное время надо думать!

.779. Вот, с этим-то сотрудником Резерфорда и можно сравнить нашего Подниекса. Работать-то он работает много и очень старателен, но только вот с мышлением у него как-то слабовато...

Приложение № 2. Доклад Подниекса в Санкт-Петербурге

10 октября 1986 в 03:15 я официально закрыл дискуссию «Канториана». В 2006 году приближалась 20-я годовщина этого события, а я как раз в это время подготавливал первый электронный выпуск документов «Канторианы». В этой связи у меня появились сомнения. Документы вообще были очень резкими против Подниекса и Кикуста. Мне хотелось бы, чтобы этот сборник стал менее резким. Но это было возможно только в одном случае: если Подниекс занял бы более разумную позицию и хотя бы частично признал Веданскую теорию. Я питал надежду, что за 20 лет он хоть немножко образумился. Поэтому я решил ему написать с предоставлением последних материалов по Веданской теории и предложением пересмотреть свою позицию.

Первое е-письмо ему было отправлено 9 августа 2006 года в 19:34, и завязалась новая переписка с ним, последняя на данный момент (2012.01) и, возможно, вообще последняя. (Она опубликована в книге {L-IDOM-1}, §22). В этой переписке вскоре обнаружилось, что Подниекс своей позиции не изменил. Он по-прежнему отказывался принимать на рассмотрение предпосылки Веданской теории, подменял мои тезисы, занимал поучающую позу и т.д., поэтому я вскоре переписку прекратил, а сборник «Канторианы» сделал еще более резким, вместо смягчающего послесловия добавив уничтожающее послесловие.

Однако в начале этой переписки Подниекс предложил мне материал его доклада на «IX научной конференции» по «современной логике» в Санкт-Петербурге. Он недавно – полтора месяца назад – побывал на ней, и теперь размещал материалы на сайте. Реферат у него был в двух вариантах: тот, который он собственно читал, и второй – немножко уже подшлифованный (он тогда находился на сайте http://www.ltn.lv/~podnieks/papers/Podnieks_O_prirode.htm). Я выбрал второй, и скопированный тогда материал помещается здесь ниже. В мае 2009 года во время переписки с молодым докторантом Атисом, написавшим мне по поводу размещенной к тому времени уже в Интернете «Канторианы», я добавил к реферату Подниекса адресованные Атису комментарии на латышском языке (которые здесь воспроизводятся в переводе на русский язык[4] и в немножко отредактированном виде: теперь в этих комментариях можно делать ссылки на статьи Веданопедии, чего, разумеется, не было в оригинале).

Реферат Подниекса назывался «О природе математики» (и, таким образом, это было то, что Подниекс противопоставляет Веданской теории, её, так сказать, альтернатива – не зря он мне этот материал сразу в начале переписки с таким торжествующим видом «подсунул»). Возможно, читатель увидит в подниексовской «альтернативе» какую-то систему, какую-то теорию, но я это там не вижу; для меня это просто какая-то окрошка, бессистемное нагромождение каких-то отрывков, которое из-за этой хаотичности вообще-то было очень трудно комментировать.

Доклад Подниекса на конференции в Санкт-Петербурге не содержит никаких собственных, оригинальных идей Подниекса (во всяком случае, я их там не вижу); он оставляет впечатление типичной работы «для галочки»: вот, для очередной аттестации нужны «научные публикации», участие на конференциях и т.д., и вот «ученый» поехал, что мог придумать, то сказал, но всё это делалось НЕ потому, что у него имелись свои открытия, которые он спешил донести миру.

Итак, текст доклада Подниекса:

§20. О природе математики

К.М. Подниекс

Латвийский Университет (Рига, Латвия)

IX научная конференция «Современная логика: проблемы теории, истории и применения в науке»

Санкт-Петербург, 22–24 июня 2006

---

[4] Перевод выполнен 1–2 февраля 2012 г.

Аннотация. 1. Математика как странное социальное явление. Ритуальный аспект математики – насколько это существенно? Сложнейшие математические доказательства – насколько они (не)надежны? Использование компьютеров в математических доказательствах. «Профессиональная» машинная математика против «любительской» математики человеческой? 2. Является ли математика «одной из наук», или ее место в системе наук – совершенно особое? Платон – Кант – Гильберт. Существует ли бесконечность в природе? Формалисты и платонисты. Источник «непостижимой эффективности» математики – способность математиков получать максимальное количество заключений из заданного количества посылок. 3. Математика и моделирование. Что отличает математические модели от прочих? Ответ: это модели, которые есть смысл исследовать без обращения к моделируемым объектам. Математика должна заниматься развитием методов построения и исследования таких моделей. Левое и правое полушарие мозга – и два измерения математики.

Abstract. 1. Mathematics as a social phenomenon. The ritual aspect of mathematics. The most complicated mathematical proofs – are they reliable? Using computers in mathematical proofs. «Professional» computerized mathematics against «amateur» human mathematics? 2. Is mathematics an «ordinary» branch of science, or, its position among other branches of science is absolutely specific? Plato – Kant – Hilbert. Does infinity exist in the natural world? Formalism and platonism. The source of «surprising efficiency» of mathematics – the ability of mathematicians to draw a maximum of conclusions from a given set of premises. 3. Mathematics and modeling. The distinguishing feature of mathematical models – one can be investigate them sensibly without a reference to the modeled objects. The task of mathematics is developing methods of creating and exploring of this kind of models. Left and right hemispheres of the human brain – and two dimensions of mathematics.

Мнение самих математиков. К философским концепциям математики, предлагаемым «со стороны», математики нередко относятся с иронией: «Математика – это то, что под этим понимают компетентные люди». Давид Гильберт.

Математики хотят сами судить о смысле своих занятий. Однако, многие их попытки записать свои философские мысли, при ближайшем рассмотрении, приводят лишь к тому,[5] что «...человек просыпается с глубоким убеждением, что во сне ему открылась тайна бытия; однако, придя в себя, он осознает, что это была фраза вроде «Мазуки в скипидаре присевают». (Станислав Лем, 1921–2006, [18],[6] глава 4).

Исключений из этого правила очень немного. Одно из самых выдающихся – Андрей Николаевич Колмогоров, см. например, [16][7]:

«...процесс познания конкретного протекает всегда в борьбе двух тенденций; с одной стороны, выделения формы изучаемых явлений и логического анализа этой формы, с другой стороны, вскрытия моментов, не укладывающихся в установленные формы, и перехода к рассмотрению новых форм, более гибких и полнее охватывающих явления. Если же трудности изучения какого-либо круга явлений состоят в осуществлении второй тенденции, если каждый новый шаг исследования связан с привлечением к рассмотрению качественно новых сторон явлений, то математический метод отступает на задний план; в этом случае диалектический анализ всей конкретности явления может быть лишь затемнён математической схематизацией. Если, наоборот, сравнительно простые и устойчивые основные формы изучаемых явлений охватывают эти явления с большой точностью и полнотой, но зато уже в пределах этих зафиксированных форм возникают достаточно трудные и сложные проблемы, требующие специального математического исследования, в частности создания специальной символической записи и специального алгоритма для своего решения, то мы попадаем в сферу господства математического метода.»

---

[5] **Атису:** Концепцию Подниекса (крайний формализм) другие математики сильно критикуют и отвергают, поэтому он здесь на них «наезжает».

[6] [18] *S. Lem.* Summa technologiae, 1967 (русский перевод: http://lib.ru/LEM/summa/). **V.E.:** Так как представляется весьма неудобным каждый раз прокручивать файл далеко вперед и искать в Списке литературы, о каком источнике идет речь, то я подниексовский список литературы продублировал в сносках.

[7] [16] *А.Н. Колмогоров*. Математика, БСЭ, 1938/1954 г. (online copy: http://www.kolmogorov.pms.ru/bse-mathimatic.html).

Очень важна, по-моему, также мысль Харвея Фридмана [25][8]: бесполезны те версии философии математики, которые «не имеют наблюдаемых последствий», т.е. не в состоянии повлиять на математическую практику.[9]

1. Математика – социальный ритуал?

Математика как социальное явление. Начнем наше исследование с чего-то бесспорного: рассмотрим математику как известное всем странное социальное явление. Что мы видим:

1) Есть люди, большинство из них носят очки, но не носят галстуков, и они называют себя математиками.

2) Университеты предлагают учебные программы по математике, там действуют кафедры математики. Можно получить математическое образование. Выполнив требования определенного ритуала, можно защитить диссертацию, став доктором математики.

3) Выполнив требования определенного ритуала, можно надеяться получить государственное финансирование для математических исследований.

4) Устраиваются математические научные конференции и издаются математические научные журналы. Выполнив требования определенного ритуала, можно стать участником этих конференций и можно публиковать математические статьи.

Какой смысл в такой характеристике? Ведь все другие науки и псевдо-науки тоже представляют собой подобные же социальные явления! И все-таки...

Тезис Дэвиса-Херша. В 1972 г. Филип Дэвис, по-видимому, первым серьезно предположил, что многие «факты», которые математики считают «надежно установленными», на самом деле таковыми не являются [7].[10] Затем Дэвис и Рубен Херш развили эту мысль дальше, и пришли к заключению, что абсолютная «объективность, точность и строгость» математики является иллюзией, и что особый социальный ритуал является существенным и неотъемлемым компонентом математики (будем называть это тезисом Дэвиса-Херша). См. например, [8][11]:

«In the real world of mathematics, a mathematical paper does two things. It testifies that the author has convinced himself and his friends that certain «results» are true, and presents a part of the evidence on which this conviction is based.»

Возможно, многим это покажется преувеличением и незаслуженным упреком математике: она-де, не «объективная наука» (что бы это ни означало), а только особый элитарный социальный ритуал, посредством которого группа людей получает и удовольствие, и материальные блага. И все-таки, тезис Дэвиса-Херша содержит больше истины, чем нам (математикам) хотелось бы...

Математика на грани возможного. Дело в том, что ритуальный компонент математики становится особенно заметным, когда обсуждаются сложнейшие математические доказательства. Разве, решая все более сложные математические проблемы, мы не приближаемся к пределам человеческих способностей? (Для специалиста по информатике неизбежность наступления такой ситуации очевидна.)

Например, когда 23 июня 1993 г. Эндрю Уайлс после 7 лет упорного труда объявил, что владеет доказательством Великой Теоремы Ферма, он вскоре обнаружил в своем рассуждении существенный пробел. Только после многих месяцев отчаянной борьбы, 19 сентября 1994 г. к нему пришла идея, позволившая завершить доказательство. Но насколько обоснованна уверенность математиков в том, что теперь очень сложное доказательство Уайлса больше ошибок не содержит? На чем основана эта уверенность?

Подобные ситуации в математике повторяются все время: неоднократно объявляются ошибочные доказательства (в том числе – серьезные) гипотезы Б. Римана, гипотезы простых чисел – близнецов, ошибочные решения других знаменитых нерешенных проблем. В лучшем случае, после исправления ошибки обнаруживается следующая...

Конечно, это не исключает, что подобно Великой Теореме Ферма, некоторые из знаменитых математических проблем будут все-таки решены. Но будет ли это всегда означать, что

---

[8] [25] *H. Friedman.* FOM posting, 2003, http://www.cs.nyu.edu/pipermail/fom/2003-October/007525.html.

[9] **Атису:** Важнее все-таки мысль Валдиса Эгле: бессмысленны те «математические теории», которые не имеют «наблюдаемых последствий», т.е. которые нельзя и никогда не будет возможным использовать в жизненной практике (как Канторизм).

[10] [7] *P.J. Davis.* Fidelity in mathematical discourse: Is one and one really two? *American Mathematical Monthly*, 1972, vol. 79, no. 3, pp. 252–263.

[11] [8]. *P. J. Davis and R. Hersh.* Rhetoric and mathematics. In *J. S. Nelson, A. Mcgill & D. N. McCloskey (Eds.), The rhetoric of the human sciences.* Madison: University of Wisconsin, 1987, pp. 53–69.

предлагаемые очень сложные математические доказательства не содержат ошибок[12]? Или заключение опять будет гласить «ритуально»: крупнейшие специалисты пришли к согласию, что наконец, «доказательство полное и правильное»?

А с самым сложным в истории математическим доказательством (теорема о классификации простых конечных групп, см. [15][13]) ситуация еще хуже – говоря словами Майкла Ашбахера:

«To my knowledge the main theorem of [AS] closes the last gap in the original proof, so (for the moment) the Classification Theorem can be regarded as a theorem. On the other hand, I hope I have convinced you that it is important to complete the program by carefully writing out a more reliable proof in order to minimize the chance of other gaps being discovered in the future.» [1][14]

«Conventional wisdom says the ideal proof should be short, simple, and elegant. However there are now examples of very long, complicated proofs, and as mathematics continues to mature, more examples are likely to appear. Such proofs raise various issues. For example it is impossible to write out a very long and complicated argument without error, so is such a 'proof' really a proof? What conditions make complex proofs necessary, possible, and of interest? Is the mathematics involved in dealing with information rich problems qualitatively different from more traditional mathematics?» [2][15]

Проблема четырех красок: машинная математика? Ровно 30 лет назад, в 1976 г. появилось еще одно свидетельство, что «так жить нельзя». (Для специалиста по информатике неизбежность наступления таких ситуаций очевидна.)

Теорема Четырех Красок. Любую географическую карту можно раскрасить 4 красками так, что смежные государства всегда будут окрашены по-разному.

В качестве гипотезы эта теорема была предложена Ф. Гутри в 1852 г., но ее доказательство удалось закончить только в 1976 г. Это сделали Вольфганг Хакен и Кеннет Аппель и притом – невиданным ранее способом! В течении 4 лет они потратили 1200 часов (тогдашнего) машинного времени, проверив 1476 конфигураций и установив в результате истинность Теоремы Четырех Красок. Ни один человек не в состоянии не только провести такой анализ «вручную», но даже просто проверить результаты, выданные компьютером!

За прошедшие 30 лет доказательство Хакена-Аппеля усовершенствовано, объем машинного перебора уменьшился до 633 конфигураций, но для человека проверка результатов этого перебора все равно остается недоступной. (Подробнее см. [24].[16]) Единственный настоящий успех: в 2004 г. лучшее из известных доказательств (вместе с компьютерной программой перебора конфигураций) удалось полностью формализовать, и его корректность была проверена (и подтверждена) с помощью универсальной программы *Coq proof checking system*. (Подробнее см. [6].[17])

Но ситуацию это не меняет: для нас – людей, доказательство Теоремы Четырех Красок остается недоступным. Мы задаем вопрос, компьютер выдает ответ, но обоснование ответа остается непонятным – даже если компьютер распечатал для нас это обоснование на нескольких десятках метров бумаги.

---

[12] **Атису:** Для Подниекса характерна неспособность строить точные модели, создавать эффективные системы понятий (т.е. такие, выделенные в которых понятия позволяли бы удобно и точно описывать вещи, существенно важные для разбираемой темы). Эта неспособность Подниекса мне хорошо знакома со времен Канторианы. На самом деле здесь надо различать две вещи, которые Подниекс не различает: 1) в какой мере вообще (даже «корректное») математическое доказательство можно считать доказательством (назовем это «**проблемой сущности** доказательства»); и 2) ошибки в доказательстве, допущенные мыслителем (вероятность которых, конечно, возрастает в длинных доказательствах) (назовем это «**проблемой ошибок** в доказательствах»). Тогда мы увидим, что как собственные слова Подниекса, так и отобранные им цитаты говорят попеременно то об одной, то о другой из этих двух проблем; он не отделяет их одну от другой, не различает их.

[13] [15] Classification of finite simple groups, *Wikipedia, the free encyclopedia*, http://en.wikipedia.org/wiki/Classification_of_finite_simple_groups.

[14] [1] *M. Aschbacher.* The Status of the Classification of the Finite Simple Groups. *Notices of the AMS*, August 2004, vol. 51, N 7, pp. 736–740 (online copy: http://www.ams.org/notices/200407/fea-aschbacher.pdf).

[15] [2] *M. Aschbacher.* Highly complex proofs and implications of such proofs. *Philosophical Transactions of the Royal Society A: Mathematical, Physical and Engineering Sciences*, October 15, 2005, vol. 363, N 1835, pp. 2401–1406 (online copy: http://www.journals.royalsoc.ac.uk/index/K62X05437172N382.pdf).

[16] [24] *R. Thomas*. The Four Color Theorem, 1995, http://www.math.gatech.edu/~thomas/FC/fourcolor.html.

[17] [6] *G. Gonthier*. A computer-checked proof of the Four Colour Theorem, 2004 (online copy: http://research.microsoft.com/~gonthier/4colproof.pdf).

Аналогичная ситуация возникла:

– в 1989 г., когда Клемент Лэм с коллегами, используя супер-компьютер Cray, завершил доказательство невозможности проективной плоскости 10-го порядка [22][18],

– в 1998 г., когда Томас Хейлс завершил доказательство гипотезы И. Кеплера (1611 г.) о наиболее плотной упаковке одинаковых шаров в пространстве [14][19].

Которым из двух видов доказательств мы должны доверять больше – «рутинным» машинным доказательствам, или сверхсложным «ручным» доказательствам? Где ошибки более вероятны?

Вольфганг Хакен и Кеннет Аппель – свои или не свои – среди математиков? Только после долгих поисков в интернете мне удалось найти фотографии этих двух революционеров (см. [9][20]). Их биографии отсутствуют в интернет-собраниях биографий знаменитых математиков (см., однако, [23][21]). Является ли эта неблаговидная ситуация следствием странных дискуссий 1976 г., когда на вид серьезные люди спрашивали: в каком смысле «доказана» Теорема Четырех Красок? является ли результат Хакена – Аппеля «настоящей» математикой?

И должны ли войти в историю шахмат авторы компьютерной программы, победившей Г. Каспарова? Они тоже – «не свои» среди шахматистов?

Машинная математика против математики человеческой? Путем привлечения компьютеров пределы математических способностей человечества отодвигаются дальше. Какой она будет – эта новая, только частично доступная человеку математика? При одинаковом уровне математических способностей математик-программист достигнет, как правило, больших успехов чем традиционный математик-бумаго-писатель.

Дорон Зейлбергер усматривает здесь аналогию с ситуацией, которая сложилась вокруг игры в шахматы. В настоящее время шахматисты-люди могут соревноваться только между собой, не надеясь уже на победы над лучшими из компьютерных шахматных программ. Так и в математике будущего: математики-только-люди (отказывающиеся от помощи компьютеров) смогут развивать только свою ограниченную «любительскую» математику. (См. интереснейшие сочинения Д. Зейлбергера на эту тему: [10, 11, 12].[22])

Следовательно, нравится это нам (математикам) или нет, но тезис Дэвиса-Херша на самом деле фиксирует неизбежное: сложность многих математических проблем превосходит человеческие способности,[23] и если в этой ситуации математики откажутся от помощи компьютеров, то часть математики действительно превратится в элитарный социальный ритуал (в худшем смысле слова: с одной стороны – занятие, доступное только выдающимся единицам, с другой – отстающее по результатам от человеко-машинной математики).

И, следовательно, концентрация исключительно на том, как и какая математика делается людьми, неуместна. Математика делается уже не только людьми. Мы должны учитывать также,

---

[18] [22] Projective plane, *Wikipedia, the free encyclopedia*, http://en.wikipedia.org/wiki/Projective_plane.

[19] [14] Kepler conjecture, *Wikipedia, the free encyclopedia*, http://en.wikipedia.org/wiki/Kepler_conjecture.

[20] [9] *European Mathematical Society*, Newsletter No. 46, December 2002, pp. 15–19 (online copy: http://emis.kaist.ac.kr/newsletter/index.html).

[21] [23] *R. Proper*. Graph Theory: The Four Coloring Theorem, 1999, http://www.facstaff.bucknell.edu/udaepp/090/w3/ryanp.htm .

[22] [10] *D. Zeilberger.* Theorems for a Price: Tomorrow's Semi-Rigorous Mathematical Culture, *Notices of the Amer. Math. Soc.*, 1993, vol. 40, no. 8, pp. 978–981 (online copy: http://www.math.rutgers.edu/~zeilberg/mamarim/mamarimhtml/priced.html). [11] *D. Zeilberger.* «Real» Analysis is a Degenerate Case of Discrete Analysis. *In «New Progress in Difference Equations», edited by Bernd Aulbach, Saber Elaydi, and Gerry Ladas, (Proc. ICDEA 2001),* Taylor and Frances, London, 2001 (online copy: http://www.math.rutgers.edu/~zeilberg/mamarim/mamarimhtml/real.html). [12] *D. Zeilberger.* Opinion #57, 2003, http://www.math.rutgers.edu/~zeilberg/Opinion57.html.

[23] **Атису:** Здесь тоже неумелая постановка вопроса (неудачная модель). Модель Подниекса создана так, что, вот мол, существуют математические проблемы; некоторые из них столь сложны, что превосходят человеческие способности... В хорошей (скажем, построенной мною) модели постановка вопроса была бы такой: вот, существует объективный мир (включая потенциальные продукты алгоритмов); этот мир бесконечен (если не Физический, то по крайней мере Платоновский мир идеальных потенциальных продуктов); любой субъект (обладающий определенной мощностью компьютера) может охватить какую-то часть этого мира, но остальную часть он охватить не может. Человек без компьютера может охватить такой, вот, круг; человек с современным компьютером может охватить, вот, такой круг; человек с более мощным компьютером может... и т.д. Такая модель была бы намного лучше, чем та, которую здесь использует Подниекс, и вещи в ней описывались бы намного яснее и точнее, нежели у Подниекса.

как и какая математика может делаться людьми с помощью компьютеров (и даже компьютерами без людей).[24]

2. Математика – «рядовая» отрасль науки?

Теперь попробуем подойти с другой стороны. Разумеется, математика – это отрасль науки, как и физика, химия, биология, история, экономика и т.д. В любой науке присутствует определенный ритуальный аспект. Однако, в естественных и социальных науках против него действует независимый «регулятор» – предмет исследования, находящийся вне исследователя.

«Нормальная» отрасль науки занимается своим особым предметом – какой-то частью явлений окружающего нас мира. Поэтому слишком смелым фантазиям здесь рано или поздно приходит конец. В биологии, например, были или нет попытки «исследования» воображаемых, реально не существующих животных? Или – «живых структур», в которых вместо кислорода фигурирует фтор (пример из фантастического романа)?

Является ли математика одной из таких предметно-ориентированных отраслей науки[25]? Или положение математики среди других наук – особое («перпендикулярное» по отношению к «плоскости параллельных наук»)?

До изобретения неевклидовых геометрий (1820е годы) математику действительно можно было считать «одной из наук». Например, геометрию Евклида можно было считать абсолютно безошибочной «физикой» реального пространства.[26]

Материалисты и марксисты пытались поддержать эту концепцию до наших дней, заявляя, что предметом математики являются пространственные формы и количественные отношения действительного мира. Для этого понятие количества пришлось определить максимально широко – как это делал Г.В.Ф. Гегель: количество – это «отмененное» качество, свойство, «безразличное» к качеству. Таким путем под такое определение математики можно подвести не только геометрию и математический анализ, но и абстрактную алгебру, топологию и все остальные математические структуры.

Вот как писал Ф. Энгельс в 1878 г. [27][27]: «Чистая математика имеет своим объектом пространственные формы и количественные отношения действительного мира, стало быть — весьма реальный материал. Тот факт, что этот материал принимает чрезвычайно абстрактную форму, может лишь слабо затушевать его происхождение из внешнего мира. Но чтобы быть в

[24] **Атису:** Здесь тоже повсюду какая-то бессильная болтовня. Ну конечно же, без компьютеров очень многие задачи (не только доказательства, но и вообще всевозможные задачи) остались бы нерешенными. И вообще – без машин. Разве без машин человек мог бы перелететь через Атлантический океан и даже долететь до Луны? Точно так же и «Теорема четырех цветов»: ну, проверил компьютер такое количество вариантов, какое человек без компьютера никогда не смог бы проверить. Ну и что? В чем проблема? Это, мол, не «настоящее» доказательство? А что вообще это такое: «настоящее» доказательство? Здесь мы возвращаемся к названной выше Проблеме сущности доказательства (в которой главный вывод такой, что «доказательством» является всё то, в результате чего субъект получил правильную, адекватную модель о рассматриваемой вещи). Получил ли субъект такую модель, просто сам своими глазами взглянув на вещь (как Доллия, зайдя за дом и взглянув на колодец в том примере из книги SKATI (см. Приложение № 1 к статье «Доказательство»)), или путем логических выводов (т.е. в результате определенных действий компьютера) как Шерлок Холмс в том же примере (и как математики в своих умозаключениях), или в результате работы компьютерной программы (отлаженной и работающей по правильному алгоритму) – это не имеет существенного значения.

[25] **Атису:** Разумеется, что математика **ЯВЛЯЕТСЯ** такой же наукой, как остальные, и что у нее **ЕСТЬ** свой объективный предмет. Только Подниекс это никак не может понять, хотя скоро будет уже 30 лет, как я ему это говорю.

[26] **Атису:** Здесь Подниекс начинает говорить совершенно бессвязно. В статусе Евклидовой геометрии ничего не изменяется от того, что изобретается геометрия Лобачевского, точно так же, как, скажем, в статусе операционной системы UNIX ничего не изменяется от того, что создается операционная система WINDOWS. UNIX как была, так и остается операционной системой с определенными свойствами. Точно так же геометрии Евклида и Лобачевского представляют две разные системы программ. Главное различие между ними заключается в том, что программная система, создающая Евклидову геометрию, встроена в человеческий мозг в ходе эволюции живой природы, а геометрия Лобачевского не встроена. Только поэтому человек воспринимает пространство как Евклидовое пространство, а о геометрии Лобачевского ему приходится судить сложными обходными путями.

[27] [27] Ф. Энгельс. Переворот в науке, произведенный г. Евгением Дюрингом («Анти-Дюринг»). Лейпциг, 1878 г. См. К. Маркс и Ф. Энгельс. Сочинения, 2 изд., т. 20.

состоянии исследовать эти формы и отношения в чистом виде, необходимо совершенно отделить их от их содержания, оставить это последнее в стороне как нечто безразличное (выделено мною и звучит весьма актуально, см. дальше! – К.П.).»[28]

«Спасая» это определение Энгельса, А.Н. Колмогоров в 1938 г. написал и Большой Советской Энциклопедии [16][29]:

«...в результате как внутренних потребностей М., так и новых запросов естествознания круг количественных отношений и пространственных форм, изучаемых М., чрезвычайно расширяется; в него входят отношения, существующие между элементами произвольной группы, векторами, операторами в функциональных пространствах, всё разнообразие форм пространств любого числа измерений и т.п. При таком широком понимании терминов «количественные отношения» и «пространственные формы» приведённое в начале статьи определение М. применимо и на новом, современном этапе её развития.»[30] (выделено мною – К. П.)

Сейчас не модно вспоминать эти идеи. Но, по-моему, это направление мысли следовало бы попробовать развить до конца.

Математика – все-таки «перпендикулярная» отрасль науки? Три гениальные догадки. Однако, по-видимому, в математике присутствует и что-то такое, что уже давно заставило – по крайней мере, некоторых мыслителей – предположить что математика – не совсем обычная отрасль науки.

Платон (4 в. до н.э.) объяснял особое положение математики с помощью своей концепции «мира идей» и «мира вещей» (второй является несовершенным воплощением первого). До рождения человека его душа обитает в «мире идей», а после этого, во время своей земной жизни, занимаясь математикой, человек всего лишь вспоминает то, чему его душа научилась в «мире идей». Т.е., математики ничего не изобретают – они «по памяти» исследуют готовые структуры. Эта мысль Платона была гениальной догадкой.[31]

В 18 веке И. Кант сделал следующий шаг, предложив свою концепцию синтетического априори. Как и Платон, Кант был поражен точностью, с которой геометрия Евклида соответствует окружающему нас пространству. Никакую другую структуру пространства тогда никто представить не мог. Но, в отличие от Платона, Кант предположил для объяснения этого феномена, что геометрия Евклида является априорной формой, которая «встроена» в челове-

---

[28] **Атису:** В подобных речах философов всегда содержится определенная доля истины, однако ни одно из этих рассуждений в наши дни уже не может удовлетворять нас полностью, потому что под этими рассуждениями нет такой модели, какая нам необходима (и какая имеется у Веданской теории): с программами мозгового компьютера, с их продуктами и т.д. Модели этих философов (в отличие от модели Веданской теории) пригодны только для (бесконечного) разглагольствования, но не пригодны для построения искусственного субъекта. Поэтому всех этих философов можно разбирать в курсе истории философии, но их не стоит упоминать при решении современных проблем.

[29] [16] *А.Н. Колмогоров*. Математика, БСЭ, 1938/1954 г. (online copy: http://www.kolmogorov.pms.ru/bse-mathimatic.html).

[30] **Атису:** Речь Колмогорова тоже создана в плохой модели. Все эти «группы», «векторы», «функциональные пространства» и т.д. являются потенциальными продуктами различных программ (алгоритмов). Программы и их продукты – вот настоящий предмет математики. (Правда, предметом математики являются не все программы, какие только в мире существуют, а определенная группа программ, развитая начиная с программ классификации множеств и их соотношений, и с программ евклидовой геометрии, по которым человеческий мозг воспринимает пространство).

[31] **Атису:** У Подниекса всё вверх тормашками. (Прямо чудо, как он ухищряется это так всегда сделать!). «Гениальной догадкой» можно назвать именно мысль Платона о том, что «существует мир идей». Мы выше видели, что этот «мир идей» на самом деле является миром (абстрактных, «идеальных») реалий, соответствующих построенным компьютером субъекта номиналиям. Но нелепостью является мысль, будто человеческая душа когда-то обитала в этом мире и позже только вспоминает, что там «видела». Вздором является (формулированная Подниексом) мысль, что математики якобы ничего не изобретают и только изучают «готовые структуры». Отношения между тем, что математики (и люди вообще) изобретают и что изучают, – очень просты. Люди **изобретают** (создают) программы, но, когда программа уже создана, то ее (потенциальные) продукты уже объективно даны и **изучаются** подобно любой другой вещи объективного мира. (Я это говорил уже бесчисленное количество раз, в том числе и Подниексу, и если он обладал хотя бы минимальным разумом, то он давно уже это знал бы и не молол бы здесь чепуху).

ческий разум,[32] и с помощью которой человек упорядочивает свои ощущения. (А арифметика целых чисел «встроена» в интуицию времени.[33]) Это была еще одна гениальная догадка.

Извинение. Возможно, вместо «подлинных мнений» Платона и Канта в этом рассуждении использованы упрощенные их модели.

От теорем к аксиомам. Рассмотрим одну из первых математических теорем (6 в. до н.э.):

Теорема. За каждым простым числом следует еще одно простое число.

Полная эмпирическая проверка здесь невозможна – целых чисел «бесконечно много» (что бы это ни означало). Как же могут математики убедить себя, что утверждение теоремы истинно?

Доказательство. Если мы имеем *k* простых чисел $p_1, p_2, ..., p_k$, то число $p_1p_2...p_k+1$ не делится ни на одно из них, т.е. оно делится на простое число, отличное от всех $p_1, p_2, ..., p_k$. Q.E.D.

Почему это убедительно (для математиков)? Ведь всякое доказательство всего лишь выводит одно утверждение из других.[34] Что же находится в начале этой цепи? Желательно – утверждения, с истинностью которых все согласны, т.е. аксиомы. Так древние греки пришли к идее аксиоматизации.[35] Потом эта идея развивалась дальше, и в 19 в. Г. Фреге и Ч.С. Пирс довели ее до понятия формализации.

Но только в начале 20 в. был, наконец, поставлен вопрос: возможно ли сформулировать полный и окончательный список аксиом, из которого можно вывести все математические теоремы? (Д. Гильберт, и это еще одна гениальная догадка)[36]. Это равносильно вопросу: возможно ли с помощью аксиом определить основные математические структуры (целые числа,

---

[32] **Атису:** Это действительно можно назвать «гениальной догадкой». Геометрия Евклида вытекает из программ, встроенных в мозг человека для восприятия пространства, – в такой формулировке это дело будет выражено точно.

[33] **Атису:** Но это крайне неудачная формулировка (и, мне кажется, она принадлежит Подниексу, а не Канту). Но не стоит это более подробно разбирать. Интервалы времени (так же, как и отрезки пространства) с точки зрения компьютера субъекта являются множествами, и как таковые могут быть обработаны программами классификации множеств и их соотношений, и тем самым могут быть охарактеризованы числами – вот и всё, что на самом деле стоит за этой формулировкой. Подниекс, как представляется, здесь имел в виду большее (*..аксиомы чисел описывают и время тоже..* или т.п.), но это уже глупости.

[34] **Атису:** «*Всякое доказательство всего лишь выводит одно утверждение из других…*» В этих словах так прекрасно, как редко где, отражается всё бессилие мышления Подниекса. Посмотрим теперь, как дела обстоят в действительности. Посмотрим, что фактически происходило в голове человека, когда он доказал упомянутую Подниексом теорему. Значит, в стартовой позиции в голове субъекта было понастроено определенное количество номиналий: там есть номиналии чисел, номиналии простых чисел (т.е. субъект способен думать об этих объектах, он имеет о них информацию), там имеются программы для осуществления арифметических операций (для сложения, умножения и др.); конечно, есть и программы, способные осуществить бокоанализ предыдущих программ; есть генераторы для образования новых программ и т.д. Теперь в такой ситуации у него появляется проблема: «Будет ли простых чисел бесконечно много, или же они когда-нибудь кончатся?». Может быть, ему этот вопрос задает ученик, может быть, самому приходит на ум – не важно. Важно то, что теперь для компьютера субъекта имеется задача: генерировать ответ на этот вопрос (как он в своей жизни генерирует ответы на сотни тысяч или даже миллионы всевозможных вопросов). Начинают работать программы, ищущие ответ. Они смотрят эти понастроенные номиналии, изучают доступную в них информацию, выполняют бокоанализ каких-то программ... Ответа нет. Субъект не знает, «будет ли простых чисел бесконечно много, или нет». И тогда программгенератор субъекта создает программу P, которая умножит все «уже существующие» простые числа и добавит к ним единицу... Субъект выполняет бокоанализ этой программы P, чтобы получить ее потенциальный продукт... И субъект восклицает «Эврика!», выпрыгивает из ванны и бегает голый по улицам кругом, размахивая руками, пока слуги его не поймают и не засунут в ванну обратно. Он нашел доказательство, что простых чисел будет бесконечно много. В добавок ко всем понастроенным в стартовой позиции структурам данных теперь в его голове достроена дополнительно еще одна программа P и номиналия ее потенциального продукта, и бокоанализ программы P показывает, что эта программа способна работать бесконечно и не остановится ни у какого количества *k* простых чисел. Вот что фактически происходит в голове субъекта, когда он «доказывает» названную Подниексом теорему, и нет там никаких аксиом, ни «правил вывода» – ничего из того, о чем сейчас начнет говорить Подниекс. (**P.S.:** Здесь дан важный пример в вопросе о сущности доказательств, и на эту сноску ниже делаются ссылки. Так как номер сноски может измениться, то она обозначается как **Примечание** *).

[35] **Атису:** Древние греки не пришли к аксиоматизации; это легенда, искажающая истину. (См., напр., приложения к статье «Аксиоматический метод»).

[36] **Атису:** Самая большая ошибка в истории математики.

множества, и т.д.), или же эти структуры существуют независимо, и с помощью аксиом мы можем пытаться их лишь описывать[37]?

Проблема существования математических структур. Мысль о независимом существовании математических структур появляется у людей довольно скоро – уже при изучении математики в школе. Проведем над читателем следующий тест. Рассматриваем последовательность т.н. простых чисел – близнецов:

(3, 5), (5, 7), (11, 13), (17, 19), (29, 31), (41, 43), (59, 61), (71,73), (101, 103), (107,109), (137, 139), ..., (1787, 1789), ..., (1871, 1873), ..., (1931, 1933), (1949, 1951), (1997, 1999), (2027, 2029), ...

В 1849 г. А. де Полиньяк предположил, что эта последовательность продолжается бесконечно.[38] Эта гипотеза до сих пор не доказана, и не опровергнута. Но ведь возможно только одно и двух?

а) Последовательность близнецов продолжается бесконечно.

б) Последовательность близнецов обрывается на последней паре.[39]

Кто может представить третью возможность? Кто не может? И как следовало бы называть эти две категории людей?

Теорема Геделя о неполноте. Если система аксиом точно сформулирована и с ее помощью можно доказать простейшие свойства целых чисел, то эта система не может быть совершенной: она либо противоречива, либо недостаточна для решения многих проблем в области своей компетенции.

Курт Гедель доказал эту теорему летом 1930 г. Конечно, с практической точки зрения, теорема Геделя является только общим предсказанием. Это предсказание подтвердилось конкретно и по-настоящему только в 1963 г., когда Поль Коэн доказал, что общепризнанные аксиомы теории множеств (если они непротиворечивы) недостаточны для решения знаменитой континуум-проблемы.

(К этой континуум-проблеме пришел в 1878 г. сам изобретатель теории множеств Г. Кантор: существуют ли множества, содержащие больше элементов, чем множество всех целых чисел, но меньше элементов, чем множество всех действительных чисел? Кантор предположил, что таких множеств не существует. Коэн показал, что, при желании, можно считать также, что они существуют.)

Итак, вполне может оказаться, что наши аксиомы недостаточны и для решения проблемы близнецов[40]: с их помощью гипотезу Полиньяка нельзя ни доказать, ни опровергнуть. Это и есть

---

[37] **Атису:** Здесь тоже отлично видна путанность мышления Подниекса. Если такой список аксиом (о каком говорит Подниекс) найти удастся, то это определит объекты математики, а если найти не удастся, то аксиомы только опишут эти объекты... (Нормальный человек даже и не может уследить за таким кувырканием мысли!). Ясно, что объекты математики существовали ДО всяких аксиом, и, значит, они от аксиом никак не зависят. Если (при уже существующих объектах математики) мы вводим дополнительно еще и аксиомы, то они (в лучшем случае) описывают эти объекты, или же (в худшем случае) они вообще не имеют никакого отношения к математике и ее объектам. Таков нормальный, логичный ход мыслей – без этих кувырканий Подниекса.

[38] **Атису:** Здесь ситуация такая же, как только что выше с простыми числами. Программы субъекта ищут ответ на вопрос «Будет ли пар близнецов бесконечно много?», но ответа не находят. И программу P, которая давала бы ответ, пока что сгенерировать не удается.

[39] **Атису:** Уточним всё же ситуацию. «Пары близнецов» не являются никакими физическими объектами подобно планете у какой-нибудь звезды. О такой планете мы могли бы строго решать: существует она или не существует? А здесь ситуация такова, что существует программа, скажем, N1, генерирующая натуральные числа, и существует программа, скажем, P1, которая в потенциальных продуктах программы N1 отмечает простые числа. И вот, в продуктах программы P1 встречаются «близнецы». Вопрос состоит в том, что произойдет при работе этих программ всё дальше и дальше. Ну – мы не знаем в некоторых аспектах, что именно произойдет. Речь не о существовании реальных объектов. Речь о том, что мы не знаем, что произойдет с программами при их бесконечном взаимодействии. Наш аппарат бокоанализа не способен это определить. Так что постановка данного вопроса Подниексом вообще не корректна.

[40] **Атису:** Здесь Подниекс вдруг перескочил на аксиомы и начал считать, что доказательства якобы вытекают из аксиом. Всё! Теперь он на своем «коньке», и дальше он никакие другие варианты (модели) рассматривать уже не способен. (Так показывает мой опыт в контактах с ним в продолжении более чем четверти века). Но доказательства не вытекают из аксиом – как я это только что показал на примере, данном самим Подниексом (см. Примечание *). Всё, что Подниекс теперь здесь дальше говорит – это глупости.

упомянутая третья возможность: возможно, мы не в состоянии доказать ни то, что последовательность близнецов обрывается, ни то, что она неограниченно продолжается.

Допустим, что так оно и есть – мы не в состоянии доказать ни то, ни другое. Полагаете ли Вы, что несмотря на это, «на самом деле» последовательность близнецов все же либо обрывается на последней паре, либо неограниченно продолжается? Т.е. вроде как бы получается, что наши аксиомы недостаточно полно описывают «реальную» последовательность целых чисел?

Но если так, то какого рода объектом эта неуловимая[41] последовательность является? В каком смысле она «существует»?

Может быть, целые числа «существуют в природе»? Во времена Ньютона действительно могли так думать. Вселенная бесконечна, поэтому, шагая в одном направлении и считая шаги, мы будем вынуждены «использовать» все целые числа. Т.е. целые числа «существуют в природе», и поэтому на каждый точно сформулированный вопрос о них должен существовать определенный ответ. В частности – на вопрос о количестве простых чисел – близнецов могут быть только два ответа (последовательность близнецов либо где-то кончается, либо никогда не кончается).

Однако, современная физика такую картину больше не поддерживает. Согласно теперешней общепризнанной космологической модели, во Вселенной содержится значительно менее 10^{1000} элементарных частиц. Таким образом, хотя знание арифметики провоцирует нас вообразить последовательность из 10^{1000} частиц, в природе ничего подобного не существует! Не означает ли это, что бесконечный «хвост» последовательности целых чисел является всего лишь нашей фантазией[42]?

Бесконечные структуры в природе не существуют? В самом деле – не существуют? Это довольно сложная проблема. Знание традиционной арифметики провоцирует нас вообразить «счет» не только частиц, но и множеств частиц, «множеств множеств» и т.д. Из N частиц получается 2^N множеств. Таким путем, начав даже с пустого множества частиц, мы можем «получить» произвольно большое количество «объектов»! (Это традиционный способ разъяснения «семантики» теории множеств: ничего нет, следовательно, существует пустое множество 0, а стало быть, и множество $\{0\}$, элементом которого является 0, затем – $\{0, \{0\}\}$, и т.д.)[43]

Однако, с точки зрения физики, этой «деятельности» скоро приходит конец из-за:

а) спонтанных превращений элементарных частиц (т.е. нельзя определить с абсолютной точностью «что есть что»),[44]

б) конечности скорости света (т.е. неразумно понятие об одновременном существовании элементов множества, занимающего очень большое пространство)[45],

---

[41] **Атису:** Почему же «неуловимая»? Имеется очень хорошо, очень точно определенная программа, порождающая числа. (Описанная даже на специальном алгоритмическом языке «Эуклидол»: см. Приложение № 1 к статье «Компьютерная канонизация»). С таким же успехом Подниекс может утверждать, что «неуловимыми» являются продукты любой другой компьютерной программы. «Неуловимы», мол, письма е-почты, отправляемые компьютерными программами, неуловимы банковские счета, поддерживаемые программами, и т.д. и т.п. Для бедного Подниекса всё «неуловимо» только потому, что он забрался на свой «конек аксиом» и ну теперь-то скачет, скачет, и ничего уже не видит, и не слышит и не понимает.

[42] **Атису:** Какое бессильное разглагольствование! Давно ведь всё доказано и объяснено. Числа НЕ собственно множества, и НЕ их соотношения. Числа – это потенциальные продукты программ классификации множеств и их соотношений. Поэтому конечность мира никак не влияет на потенциальную бесконечность работы этих программ. Это было сказано Подниексу почти 30 лет тому назад; сказано еще и еще, и еще... А он только несет и несет своё.

[43] **Атису:** Ишь как Подниекс прыгает с материальных множеств на типичную мозговую программу: что же эти его множества $\{0, \{0\}\}$... такое есть, как не потенциальные продукты какой-то программы? Это глупая, бессмысленная программа – не из тех программ, которые у шумеров, египтян и вавилонян реально создали математику, – но всё же это мозговая программа, которую можно сгенерировать и над которой можно совершить бокоанализ (в результате его рисуя потенциальные продукты программы, как это делает Подниекс).

[44] **Атису:** Боже мой, какая каша у этого Подниекса в голове! Любая из этих программ остановится не потому, что «элементарные частицы спонтанно превращаются», а потому, что будут исчерпаны данные программам ресурсы (если их вообще кто-нибудь будет пускать на выполнение, но обычно такие программы на выполнение вообще не пускают, удовлетворяясь лишь их бокоанализом).

[45] **Атису:** Здесь Подниекс опять перескакивает с потенциальных продуктов программ на материальные множества. Никакой последовательности. Ни малейшей способности отличить и разграничить объекты различной природы.

в) конечного времени существования Вселенной, и т.д.

По-видимому, наибольшую ясность в эту проблему может внести вывод Сета Ллойда [19][46]:

«All physical systems register and process information. The laws of physics determine the amount of information that a physical system can register (number of bits) and the number of elementary logic operations that a system can perform (number of ops). The Universe is a physical system. The amount of information that the Universe can register and the number of elementary operations that it can have performed over its history are calculated. The Universe can have performed 10^{120} ops on 10^{90} bits (10^{120} bits including gravitational degrees of freedom).»

Таким образом, за время своего существования, Вселенная как компьютер не могла совершить очень много.[47]

Так или иначе, наш вывод должен быть один: хотя бесконечная последовательность целых чисел и произошла из человеческой практики как абстракция реальных процессов счета, прямым отражением какой-либо структуры реального мира она все же не является. И поэтому бесконечный «хвост» этой последовательности является только плодом нашей фантазии[48]!

А.Н. Колмогоров в лекции «Современные взгляды на природу математики» (напечатана в книге [17][49]) предложил вообразить, каким образом существа, обитающие в конечном мире, могут прийти к идее бесконечности:

«... представим себе разумное существо, живущее в мире, обладающем лишь *конечной* сложностью, способном находиться лишь в *конечном* числе физически различных состояний и эволюционирующем в «дискретном времени», ... Можно достаточно правдоподобно объяснить, как такое существо, неспособное по своей структуре исчерпать всю сложность окружающего его мира и сталкивающегося в его пределах со все более сложными системами, состоящими из очень большого числа элементов, создаст в процессе своей вполне практически и разумно направленной деятельности концепцию *бесконечного* натурального ряда.»[50]

Формализм

Если бесконечная последовательность целых чисел не является «природной структурой», то какого рода объектом эта последовательность является? В каком смысле она «существует»? И в каком смысле тогда существуют более сложные математические структуры: действительные числа, функциональные пространства, алгебры, топологии, несчетные бесконечные множества, большие кардиналы, категории и т.д.? Это ведь тем более – не «природные структуры»!

Простейший возможный ответ[51] на эти вопросы: математические структуры сами по-себе вообще не существуют, существуют только системы аксиом, которые их определяют.[52]

---

[46] [19] *S. Lloyd.* Computational capacity of the universe. *Physical Review Letters*, 2002, vol. 88, issue 23, 4 p. (extended online version: http://arxiv.org/abs/quant-ph/0110141).

[47] **Атису:** Что, однако, не влияет на ПОТЕНЦИАЛЬНЫЕ продукты бесконечно работающих программ.

[48] **Атису:** Все числа одинаковы: это таксоны классификации, потенциальные продукты программы. Число «1» является такой же «фантазией» или такой же «реальностью», как число, скажем, «10^(10^(10^(10^(10^1000))))». Нет никакой разницы между «головой» и «хвостом» «числовой оси». Видишь, как неточное мышление Подниекса довело его до полного бреда.

[49] [17] *А. Н. Колмогоров.* Математика – наука и профессия. *Выпуск 64 серии «Библиотечка квант»*, Москва, Наука, 1988, 288 с., online copy: http://ilib.mccme.ru/djvu/bib-kvant/maths.htm).

[50] **Атису:** Объяснение Колмогорова неверно. Бесконечность создается не тем, что люди встречаются с (конечными!) множествами, объем которых превышает их возможности, а бесконечность порождается тем, что существуют программы, которые могут работать (потенциально) бесконечно. Такая программа может быть чрезвычайно простой. Например, в «Паскале»: Procedure A; var B: byte; Begin while True do B := 0; End;. Всё! – маленькая программка, но будет работать бесконечно, «тыкая» ноль в одно и то же место бесконечно долго.

[51] **Атису:** Подниексу уже почти 30 лет хорошо известен мой ответ: все упомянутые математические структуры являются потенциальными продуктами (мозговых) программ. И здесь вообще-то существует определенная (психологическая? этическая?) проблема: ПОЧЕМУ Подниекс ведет себя так, будто он никогда ничего об этом не слышал? Будто моя концепция (которая десятки раз «подсовывалась» ему) просто не существует. Как это объяснить? Тотальная тупость? Или что?

[52] **Атису:** Ну вот, когда Подниекс успешно проигнорировал ту концепцию, которая (как действительно верная) является главным конкурентом его концепции, то он может радостно перескочить на свои аксиомы и теперь уж петь дальше лишь о них.

Во-первых, аксиомы действительно существуют – и даже как написанные на бумаге физические объекты!

Во-вторых, математики охотно занимаются выводом следствий из любых «интересных» аксиом, даже если им (наперед) не известно, что за ними «стоит». Н.И. Лобачевский начинал именно так. Когда он решил изучить следствия из гипотезы «через точку можно провести несколько различных прямых не пересекающих данную прямую», он не мог знать, «возможно» это или нет (скорее казалось, что «невозможно»). После нескольких лет работы под знаком этой «невозможной» гипотезы, он пришел к убеждению, что она «возможна» – что кроме евклидовой возможна и другая – «воображаемая геометрия», и что следует попытаться выяснить, которая из этих геометрий лучше описывает физическое пространство.

В философии математики такой подход называется формализмом (и Лобачевский был одним из первых настоящих формалистов). Формалисты отстаивают право математиков исследовать любые системы аксиом, и настаивают на том, что только аксиомы могут служить точно определенным объектом для обсуждения.[53]

(Просьба не путать эту серьезную философию с широко пропагандируемой карикатурой на формализм: математика-де – бессмысленная игра с символами.[54] Эта карикатура – изобретение противников формализма, странным образом полагающих, что «смысл» заключен в символах, а не в их взаимоотношениях, т.е. в конечном счете – в аксиомах. См. также приведенную ниже цитату из [28].[55])

Разумеется, первичной основой математических аксиом является практический, технический и научный опыт человечества, но аксиомы идут значительно дальше этого ограниченного опыта: они экстраполируют, сглаживают, идеализируют, искажают и т.д. В результате получаются «структуры», точных аналогов в природе не имеющие.

С этой точки зрения, аксиомы арифметики или аксиомы теории множеств не описывают, а определяют последовательность целых чисел.[56] И если эти аксиомы (возможно) не в состоянии решить проблему простых чисел – близнецов, то с этим надо мириться, или – надо пытаться аксиомы дополнять или изменять.

С точки зрения формалистов, теорема Геделя о неполноте вскрывает неизбежность диалектики в развитии математики – как только Вы точно сформулировали Ваши аксиомы, неизбежно одно из двух: а) Ваши аксиомы приведут к противоречиям (тогда Вам придется их совершенствовать), б) Ваши аксиомы окажутся недостаточными для решения многих проблем в области своей компетенции (т.е. Вам опять-таки придется их совершенствовать). Всякая

[53] **Атису:** Здесь дана декларация не формализма, а невообразимого догматизма. (Пожалуй даже бóльшая часть «математических формалистов» отвергли бы эту декларацию Подниекса, а его самого прогнали бы из своих рядов как позорящего их экстремиста). Представь себе, Атис: «*только аксиомы могут служить .. объектом для обсуждения*». Вся сущность научного мышления состоит в том, что выдвигаются разные предположения, и потом сравниваются следствия, вытекающие из того и другого предположения. А Подниекс уже заранее декларирует, что только одно предположение вообще подлежит обсуждению. Это так же, как объявить, что только одно предположение – что Земля находится в центре Вселенной! – вообще можно обсуждать. Остальные все просто не существуют! (И этот чудовищный догматизм не является какой-нибудь нечаянной оговоркой Подниекса или неточностью. Нет, это у него действительно «руководство к действию» на всю жизнь. Те почти 30 лет, что я его знаю, он именно по этой программе и жил и действовал: никакие альтернативные системы не подлежат обсуждению; они просто не существуют! (Или, если существуют, то – незаконно).

[54] **Атису:** Ну, то, что математика представляет собой «игру с символами», это сами формалисты и декларировали. Только они говорили не «бессмысленная игра» (как Подниекс это карикатурит и приписывает противникам), а они говорили: «игра по определенным правилам» (наподобие шахмат и т.д.).

[55] [28] *P. S. Churchland, P. Churchland.* Neural worlds and real worlds. *Nature Reviews Neuroscience,* November 2002, vol. 3, no. 11, pp. 903–907 (online copy: http://philosophy.ucsd.edu/Faculty/neuralWorlds.pdf).

[56] **Атису:** Грассман начал говорить об аксиомах чисел в 1861 году, Пеано ввел свои аксиомы в 1880-е годы. Что же существовало до этого и называлось числами? Если человек обладает хоть минимальной способностью к логическому мышлению, то ведь он должен был бы понять, что аксиомы, появляющиеся только во второй половине XIX века (когда уже даже и дифференциальное исчисление было совершенно готово и создано, не говоря уже о более ранних разделах математики, таких как арифметика и алгебра), – то этот человек должен был бы понять, что эти аксиомы в лучшем случае лишь (адекватно) описывают что-то такое, что уже существовало до них. Или – если аксиомы претендуют на то, что они определяют нечто новое, – то это новое явно НЕ ТЕ числа, при помощи которых были созданы арифметика, алгебра и дифференциальное исчисление. Вообще просто удивительно, как в головке Подниекса (пусть догматической – но всё-таки!) может сосуществовать всё то, что он плетет?!

фиксированная («застывшая») система аксиом несовершенна (именно в силу своего застывшего характера) и поэтому должна совершенствоваться.

Что может быть лучше этого захватывающего процесса?

Платонизм?

Кроме решения, предлагаемого формалистами, проблему существования математических структур можно пытаться решить и другим путем. Поскольку (как мы видели) математические структуры не существуют в природе, но «должны существовать независимо от нас, людей», то они существуют в особой «третьей реальности», к которой человеческий разум имеет доступ с помощью интуиции.[57]

В философии математики такой подход называется платонизмом. Платонисты настаивают на том, что математики должны заниматься исследованием того единственного варианта математических структур, который существует в «третьей реальности».[58]

С этой точки зрения, бесконечная последовательность целых чисел является «третьей реальностью», в которой гипотеза Полиньяка должна быть либо истинной, либо ложной («третьего не дано»: пары близнецов либо кончаются, либо нет). А теорема Геделя о неполноте показывает, что никакая фиксированная система аксиом не может дать исчерпывающее описание бесконечной последовательности целых чисел.[59]

Положителная роль платонизма в математике. Платонистское отношение к математическим структурам характерно для большинства математиков (которые, как правило, неохотно задумываются о «смысле» своей деятельности). Во первых, они полагают, что предмет их исследований «существует» независимо от них самих (и вообще, «от нас, людей»). Во-вторых, они бессознательно (по аналогии) переносят на свою «третью реальность»[60] многие привычные им свойства окружающей нас физической реальности (прежде всего – закон исключенного третьего).

По-видимому, «для нас, людей», платонизм – это наиболее эффективный способ работы с воображаемыми структурами. Например, представить себе последовательность целых чисел почти физически – как «дорогу в бесконечность» – и искать на ней последнюю пару близнецов – ведь она там – на дороге – либо где-то существует, либо нет? Математики могут годами «жить» в своих структурах как в особом мире, почти не задумываясь о том, что эти структуры означают (если вообще что-то означают).

Действуя таким способом, математики научились получать максимальное количество заключений из заданного количества посылок. По-моему, именно это объясняет «непостижимую эффективность» математики в других науках.[61]

---

[57] **Атису:** Какая слабая формулировка: «в третьей реальности...», «с помощью интуиции...». С такими понятиями робота не построишь... (И ведь Подниексу давно известны мои формулировки, несравнимо более точные...).

[58] **Атису:** Конечно, «математические платонисты» не знают Веданской теории и поэтому свои взгляды не могут выразить столь точно, как это возможно в терминах Веданской теории. Но по существу эти «платонисты» придерживаются мнения Веданской теории (хотя и не могут это точно выразить).

[59] **Атису:** Ну, если так, то это только доказывает, что аксиомы вообще надо выбрасывать в мусорник. Это был неудачный эксперимент, который следует прекратить. Математику создали без аксиом, и будем жить и дальше без них! (Но вывернутый наизнанку ум Подниекса поступает прямо противоположно: из печального результата аксиоматизации он делает не тот вывод, что аксиомы представляют собой годные лишь для мусорника глупости, а такой вывод, что даже самая простая потенциально бесконечно работающая компьютерная программа непознаваема, непостижима, противоречива и т.д.!).

[60] **Атису:** «Первая реальность», надо полагать, – это физический мир; «вторая реальность» у Подниекса – аксиомы, и тогда третья – «мир идей» платонистов. Но такая «нумерация» не соответствует исторической правде и показывает только эгоцентризм Подниекса. Исторически «второй реальностью» был Платоновский мир идей (мир потенциальных продуктов мозговых программ), а любимые Подниексом аксиомы и есть эта «третья реальность».

[61] **Атису:** Хорошо, что Подниекс поставил впереди этого предложения слова «По-моему». Благодаря этому, мы точно знаем, КТО эти глупости декларирует. Фраза о «непостижимой эффективности» крылата и использовалась бесчисленное количество раз; ее постоянно употребляют (такие мужи, как, например, Эйнштейн), чтобы выразить удивление тем, каким образом математика (которая же якобы вытекает из аксиом!) может быть столь эффективна в описании физического мира. Чтобы объяснить этот парадокс («непостижимую эффективность»), нужно указать, какая существует связь между математикой и физическим миром. А наш Великий умник Подниекс (очевидно, так и не поняв сущности вопроса)

Платонизм как философия. Итак, платонизм – неплохой метод. Именно как метод рассматривал его сам автор термина «математический платонизм» П. Бернайс [3][62]. Но он предупреждал, что платонистский метод следует применять с осторожностью:

«... It is also this transcendent character which requires us to take certain precautions in regard to each platonistic assumption.»

Но как мы должны оценивать платонистскую гипотезу существования «третьей реальности» в качестве общефилософской идеи? Дает ли принятие этой гипотезы какие-либо преимущества?

Идею «третьей реальности» предложил еще Платон (его абсолютно совершенный «мир идей»). Но скептический Кант не нашел оснований для введения «третьей реальности», он приписал математические структуры «второй реальности», т.е. объявил их свойствами человеческого разума.

В 1912 г., в своей знаменитой лекции «Интуиционизм и формализм» Л. Брауер предложил сохранить кантовское синтетическое априори только на 50% – объявить «свойством человеческого разума» не всю математику, а только идею последовательности целых чисел.

По аналогии, и математические платонисты со временем разделились на два лагеря: 100%-й платонизм – теоретико-множественный платонизм (верит в единственность «подлинного мира множеств») и 50%-й платонизм – платонизм только в отношении целых чисел (сомневается в единственности «мира множеств» и верит только в единственность последовательности целых чисел). 50%-е платонисты пропагандируют ту же иллюзию, что Кант и интуиционисты – только приписывают они ее не «второй», а «третьей реальности».

Компетентное мнение нейрофизиологов о «свойствах человеческого разума» см. в [28][63]:

«We call this hypothesis 'domain-portrayal semantics' because it proposes that the primary representational relationship holds between the high-dimensional map as a whole, and the categorical/causal domain as a whole. Traditional semantics, by contrast, assumes the primary representational relationship to hold between our internal concepts taken one by one, and external features taken one by one. According to the domain-portrayal hypothesis, single concepts derive their representational significance entirely from the larger neural model in which they are embedded. Intuitively, of course, it may seem otherwise, but 'folk semantics' is undoubtedly as misconceived as were folk physics and folk cosmology.»[64]

Другими словами: если «третья реальность» существует, то Земля плоская. А как должны относиться к идее «третьей реальности» наши компьютеры, участвующие в развитии математики?

3. Математика – математическое моделирование?

Теперь попытаемся подойти к математике еще с одной стороны – опираясь на понятие модели. Разумеется, моделирование играет в науке важную роль. Перефразируя известное мнение И. Канта:

«Ich behaupte, dass, in jeder besonderen Naturwissenschaft, nur soviel eigentliche Wissenschaft angetroffen werden kann, als darin Mathematik enthalten ist.»

Я бы сказал даже более того: в каждой науке содержится столько настоящей науки, насколько она занимается моделированием. Некоторые науки пытаются моделировать сам процесс моделирования (например, философия).

Модель – это «объект», который используется вместо другого объекта («оригинала») с целью прогнозировать «поведение» последнего. Полезно сознавать также, что:

отвечает Эйнштейну: «математики научились получать максимальное количество заключений из заданного количества посылок».

[62] [3] *P. Bernays.* Sur le platonisme dans les mathematiques. *L'enseignement mathematique*, vol. 34 (1935), pp. 52–69 (online English translation by Charles D. Parsons: http://www.phil.cmu.edu/projects/bernays/Pdf/platonism.pdf).

[63] [28] *P. S. Churchland*, *P. Churchland.* Neural worlds and real worlds. *Nature Reviews Neuroscience*, November 2002, vol. 3, no. 11, pp. 903–907 (online copy: http://philosophy.ucsd.edu/Faculty/neuralWorlds.pdf).

[64] **Атису:** Цитата вообще не имеет никакого отношения к обсуждаемым вещам. Каким же образом это оспаривает изложенное в моих схемах? (**P.S.** Речь о схемах, которые рисовались и посылались докторанту Атису; см. {L-IDOM-1}).

«All models are wrong, but some are useful.»[65] Джордж Бокс, один из классиков статистики [4][66].

Оказывается, что математика обращается с моделями по-особому.

Идею модели должен был знать еще Н.И. Лобачевский, когда он пытался идентифицировать истинную геометрию физического пространства путем астрономических измерений. Дело в том, что (в отличие от Канта) ему была известна не одна возможная геометрия, а две (причем вторая – с параметром кривизны). И поэтому у него естественным образом возник совсем не кантианский вопрос: которая из геометрий лучше как описание физического пространства?

В серьезных науках модели не «выводятся» из опыта:

«... the human mind has first to construct forms independently, before we can find them in things. ... knowledge cannot spring from experience alone, but only from the comparison of the inventions of the intellect with observed facts. » Альберт Эйнштейн [26][67].

Используемая в биологии модель живой клетки постоянно развивается, охватывая все новые и новые экспериментальные данные. Но что, если этот поток новой информации прекратить, и заявить, что отныне мы будем исследовать модель «как она есть» (несмотря на ее неточность)? И заниматься этим несколько лет? Я бы сказал, что именно в этот момент наша модель становится математической моделью.[68]

Многим все еще кажется, что математическая модель – это модель, построенная с помощью известных математических структур (чисел, пространств, функций итд.). Но, по-моему, более точным отличительным признаком математических моделей является то, что эти модели оторваны от моделируемых объектов. Их исследованием можно заниматься годами (защищая множество диссертаций), к моделируемым объектам больше не обращаясь. По-моему, именно это отличает математические модели от не-математических.

Таким образом, не какой-то специфический предмет отличает математику от других наук, а специфический метод – создавать и исследовать модели, полностью оторванные от моделируемых объектов, или, что то-же – создавать и исследовать фиксированные (застывшие) и самодостаточные модели.[69]

«More than anything else mathematics is a method.» Моррис Клайн.

«Though this be madness, yet there is method in't.» Полоний – Гамлету. На этот «математический» экскурс В. Шекспира обратил внимание С. Лем в своей «Сумме технологий»

---

[65] **Атису:** Это, скорее всего, говорилось как шутка, и как шутка она хороша. Но если это утверждение принимать всерьез, то оно уже не столь хорошее. «Плохая модель» – это не удобный и эффективный термин, если он относится ко всем моделям. Когда я был 22-летним студентом, я в 1969 году разработал свою первую теорию, которую назвал «информатикой» (такого термина в мире тогда еще не было; он появился только позже; я сам это слово придумал по образцу «кибернетики»; у меня «информатикой» была теория информации – не та, теория Шеннона, а другая, моя). В свою информатику я включил и «теорию моделей», и сущность там была такова: модель – это материальная система, у которой существует изоморфизм с какой-то другой системой; изоморфизм существует в определенном аспекте (характеризуемом позициями аспекта); широта аспекта изоморфизма может изменяться от 0 до, скажем, 1 (или от 0% до 100%). Если широта аспекта 0, то объекты абсолютно не схожи; если широта аспекта 100%, то модель является полной копией объекта; ну, а посередине находятся «нормальные модели», когда в определенном аспекте изоморфизм существует, и в определенном аспекте не существует. Такая теория гораздо лучше, чем теория, в которой «все модели плохи» (что, конечно же, означает всего лишь то, что они не во всех аспектах соответствуют оригиналу).

[66] [4] *G.E.P. Box.* Robustness in the strategy of scientific model building. In *R.L. Launer, & G.N. Wilkinson (Eds.), Robustness in statistics*, New York: Academic Press, 1979, pp. 201–236.

[67] [26] *Albert Einstein* ueber Kepler. *Frankfurter Zeitung*, 9. November 1930 (online copy: http://www.solidaritaet.com/ibykus/2005/4/iby0504-einstein.pdf, английский перевод: http://www.schillerinstitute.org/fid_02-06/2006/061-2_375_Kepler.html, манускрипт: http://www.alberteinstein.info/db/ViewImage.do?DocumentID=34085&Page=1).

[68] **Атису:** Он так сказал бы, и изрек бы еще одну несуразицу. Конечно, как Ты мог декларировать, что ночной горшок – это число π, так и Подниекс может объявить, что та остановленная модель клетки есть математическая модель, но это не совпадает с общепринятым пониманием математической модели. Математическая это модель или нет, – это определяется программами, алгоритмами, которые используются в модели. Математике принадлежит лишь определенный класс программ.

[69] **Атису:** Это еще одно бессильное топтание вокруг настоящего предмета математики. (Что только не выдумывают, лишь бы не говорить о НАСТОЯЩЕМ предмете!).

[лем][70]. Два русских перевода из интернета: «Хоть это и безумие, но в нем есть метод.»; «Хоть это и безумие, но в нем система есть.»

Математик может произвольно модифицировать свою модель,[71] даже разрушив ее (и так уже ограниченное) подобие «оригиналу». И заниматься такой моделью многие годы... Лобачевский начинал именно с этого. В математику, по-моему, возможность такого экспериментирования заложена «по определению» – из-за оторванности моделей от моделируемых объектов, другими словами – из-за застывшего и самодостаточного характера математических моделей.

Базы данных – математические модели? База данных предприятия – это, несомненно, модель этого предприятия. Чем полнее база данных, тем лучше она может использоваться в качестве замены самого предприятия – для сбора статистических данных или даже для финансовой проверки.

В соответствии с вышеприведенным определением, база данных предприятия станет математической моделью, если мы «оторвем» ее от самого предприятия, и будем заниматься ею как полностью самостоятельным объектом. Такую «оторванную» базу данных легко модифицировать в самых различных целях. И можно даже сделать из нее базу данных, которая с реальностью ничего общего уже не имеет. Совсем как в математике!

Такого рода базы данных – отличаются ли они чем-то принципиально от моделей движения планет Солнечной системы (которые без сомнения признаются математическими моделями)?

Наверное, все согласятся, что модели, которые оторваны от моделируемых объектов (т.е. застывшие и самодостаточные модели) образуют важный класс моделей. Но, быть может, их лучше называть формальными моделями, а «настоящие» математические модели – это структуры «более тонкой природы»? База данных предприятия, несомненно, представляет собой формальную модель, но кто посмеет назвать ее математической?

Но как в таком случае следовало бы назвать науку, занимающуюся не исследованием какой-то одной формальной модели, или специфического класса формальных моделей, а исследованием формальных моделей как таковых? Это, «случайно», все-таки – не математика? Виктор Михайлович Глушков ответил на это так [5][72]:

«Если же вы считаете, что математика должна иметь более светлое будущее, то надо, вероятно, согласиться с тем, что вышеупомянутые методы следует тоже отнести к математике. В противном случае математика будет идти к упадку, а вместо нее будет рождаться нечто новое.»

Поэтому я хочу утверждать, что застывший характер и самодостаточность является подлинным отличительным признаком именно математических моделей. Только благодаря этому тезису мы открываем истинную «перпендикулярную» природу математики как науки. Математика может исследовать любые объекты, процессы, системы и т.д. без каких-либо ограничений. Специфическим является здесь только подход (метод!) – создавать модели, которые есть смысл исследовать без обращения к моделируемым объектам. Математика должна заниматься развитием методов построения и исследования таких моделей**.** Это мое определение математики.

Система целых чисел – модель процессов счета. Система действительных чисел – модель процессов измерения.[73] Эти две структуры наиболее часто используются при построении математических моделей. Поэтому «численное моделирование» у многих все еще ассоциируется с «настоящим» математическим моделированием вообще. Но это уже давно не так.

Отрицательный аспект. Оторванность математических моделей от «оригиналов» делает возможными бесполезные направления исследований, когда исследуются «модели в себе»,

---

[70] [18] *S. Lem.* Summa technologiae, 1967 (русский перевод: http://lib.ru/LEM/summa/).

[71] **Атису:** Объектом исследования математика (моделью) являются потенциальные продукты каких-то программ. Этот объект (модель) можно изменить, и это означает, что изменяется генерирующая его программа.

[72] [5] *В.М. Глушков.* Гносеологические основы математизации наук. *Препринт семинара Института кибернетики АН УССР «Методологические вопросы кибернетики»*, Киев, 1965 г. (online copy: http://www.library.ntu-kpi.kiev.ua/html/arh_ntuu/glushkov/Gnoseolog_osnovy.htm).

[73] **Атису:** Если под этими словами Подниекса понимать то, что я рассказывал Тебе раньше (о номиналиях, множествах, классификации множеств и их отношений, о таксонах классификации, программах, их потенциальных продуктах и т.д.), то можно сказать, что слова Подниекса соответствуют действительности (его слова представляют собой такое не очень точное обозначение действительности). Но только Подниекс ведь под этими словами понимает нечто совсем другое.

которые никогда не будут применяться для моделирования чего-то полезного. Но очень важно сознавать, что основу этих отрицательных явлений составляет сам основополагающий принцип – возможность оторвать модель от «оригинала» и заниматься ею долгое время, полностью игнорируя «оригинал», и наконец – возможность изменить модель таким образом, что она не отвечает уже никакому «оригиналу». Смешно? Но без этого нет математики!

Почему не все с этим согласны? Почему математики, как правило, не согласны, что отличительным признаком математических теорий является именно их застывший характер и самодостаточность? Святослав Сергеевич Лавров в письме, написанном в октябре 1988 г., объяснил мне это так:

«...Во-вторых, внутри любой теории ее теоремы состоят, как правило, из двух частей: условия и заключения. Заключение теоремы является, таким образом, следствием не только застывшей совокупности аксиом, но и конкретного, специфического для данной теоремы условия. А что такое условие, если не расширение застывшей системы принципов? В-третьих, любая математическая теория открыта для пополнения новыми *понятиями*. Так, в анализе вслед за понятием непрерывности функции вводятся: понятие точки разрыва, классификация таких точек, понятие функции, непрерывной на отрезке, на других множествах, равномерной непрерывности, условия Липшица, модуля непрерывности и т.д. Исследуются свойства каждого нового понятия и эти свойства постепенно оттесняют на задний план исходную совокупность аксиом... Все это нисколько не противоречит тезису о неизменности исходной системы принципов (аксиом и правил вывода), но препятствует восприятию математических теорий как «застывших» работающими математиками.»[74]

Осознание застывшего и самодостаточного характера математических моделей – это только первый шаг в понимании природы математики. Но, по-моему, без этого шага невозможно правильно понять ни особое положение математики среди других наук, ни то, как математика действует. Но разве это все?

Два полушария математики? Как известно, существуют два механизма мозговой деятельности человека:

а) «Лево-полушарный» – это «компьютер», эффективно выполняющий алгоритмические действия и умеющий хорошо действовать в рамках заданных правил (не спрашивая, «зачем»).

б) «Право-полушарный» – это «творец», способный выходить за рамки заданных правил (это и есть творчество).

Сергей Юрьевич Маслов усмотрел здесь аналогию с «некоторыми аспектами развития математики» [20, 21][75]:

«... в большинстве применений каждый конкретный процесс моделируется фиксированной системой того или иного типа и изучаются свойства этой дедуктивной системы. Однако в более сложных случаях сутью моделируемого процесса оказывается переход от одного исчисления к другому.»

Два измерения математики! Отбросив осторожность, я бы распространил эту аналогию не только на «некоторые аспекты развития математики», но и на всю математику вообще. Итак, в мире математических моделей люди занимаются двумя видами деятельности:

а) Исследование фиксированной модели, фиксированной математической структуры или системы аксиом. Это соответствует «профилю» левого полушария – способности эффективно действовать в рамках заданных правил (не спрашивая «зачем»).

б) Изменение имеющихся моделей, математических структур или аксиом, и создание новых. Это соответствует «профилю» правого полушария – способности выходить за рамки заданных правил, пробовать что-то новое.

Таким образом, получается, что математика действует как бы в двух измерениях. Двумерная модель математики: большая часть рабочего времени математиков проходит в направлении первого измерения – работая в фиксированной теории (над фиксированной математической структурой). Именно здесь источник «непостижимой эффективности» математики – способность математиков получать максимальное количество заключений из заданного

---

[74] **Атису:** Но ведь это изложение же противоречиво!

[75] [20] *С.Ю. Маслов.* Асимметрия познавательных механизмов и ее следствия. *Семиотика и информатика*, вып. 20, АН СССР, ВИНИТИ, Москва, 1983, стр. 3–31 (online copy: http://safety.spbstu.ru/el-book/www.philosophy.ru/library/logic/maslov/01.html). [21] *С.Ю. Маслов.* Теория дедуктивных систем и ее применения. Радио и связь, Москва, 1986, 133 стр.

количества посылок. Но время от времени они вынуждены продвигаться и вдоль второго измерения – изменяя свои теории (структуры), или изобретая новые.

Первое измерение не исчерпывает всю сущность математики. Разве математика – неупорядоченная «куча» несвязанных (хотя и фиксированных и самодостаточных) структур? Разумеется, нет. Математика – система таких структур, поэтому исследование (т.е. моделирование) закономерностей этой системы следовало бы считать важной задачей философии математики.

С этой точки зрения, знаменитый многотомный трактат Никола Бурбаки «Элементы математики» следует считать попыткой систематического рассмотрения второго измерения математики. По-видимому, аналогичную роль играет и математическая теория категорий [13][76].

ЛИТЕРАТУРА

[1] *M. Aschbacher.* The Status of the Classification of the Finite Simple Groups. *Notices of the AMS*, August 2004, vol. 51, N 7, pp. 736–740 (online copy: http://www.ams.org/notices/200407/fea-aschbacher.pdf).

[2] *M. Aschbacher.* Highly complex proofs and implications of such proofs. *Philosophical Transactions of the Royal Society A: Mathematical, Physical and Engineering Sciences*, October 15, 2005, vol. 363, N 1835, pp. 2401–1406 (online copy: http://www.journals.royalsoc.ac.uk/index/K62X05437172N382.pdf).

[3] *P. Bernays.* Sur le platonisme dans les mathematiques. *L'enseignement mathematique*, vol. 34 (1935), pp. 52–69 (online English translation by Charles D. Parsons: http://www.phil.cmu.edu/projects/bernays/Pdf/platonism.pdf).

[4] *G. E. P. Box.* Robustness in the strategy of scientific model building. In *R. L. Launer, & G. N. Wilkinson (Eds.), Robustness in statistics*, New York: Academic Press, 1979, pp. 201–236.

[5] *В. М. Глушков.* Гносеологические основы математизации наук. *Препринт семинара Института кибернетики АН УССР «Методологические вопросы кибернетики»*, Киев, 1965 г. (online copy: http://www.library.ntu-kpi.kiev.ua/html/arh_ntuu/glushkov/Gnoseolog_osnovy.htm).

[6] *G. Gonthier.* A computer-checked proof of the Four Colour Theorem, 2004 (online copy: http://research.microsoft.com/~gonthier/4colproof.pdf).

[7] *P. J. Davis.* Fidelity in mathematical discourse: Is one and one really two? *American Mathematical Monthly*, 1972, vol. 79, no. 3, pp. 252–263.

[8]. *P. J. Davis and R. Hersh.* Rhetoric and mathematics. In *J. S. Nelson, A. Mcgill & D. N. McCloskey (Eds.), The rhetoric of the human sciences.* Madison: University of Wisconsin, 1987, pp. 53–69.

[9] *European Mathematical Society*, Newsletter No. 46, December 2002, pp. 15–19 (online copy: http://emis.kaist.ac.kr/newsletter/index.html).

[10] *D. Zeilberger.* Theorems for a Price: Tomorrow's Semi-Rigorous Mathematical Culture, *Notices of the Amer. Math. Soc.*, 1993, vol. 40, no. 8, pp. 978–981 (online copy: http://www.math.rutgers.edu/~zeilberg/mamarim/mamarimhtml/priced.html).

[11] *D. Zeilberger.* «Real» Analysis is a Degenerate Case of Discrete Analysis. *In «New Progress in Difference Equations», edited by Bernd Aulbach, Saber Elaydi, and Gerry Ladas, (Proc. ICDEA 2001)*, Taylor and Frances, London, 2001 (online copy: http://www.math.rutgers.edu/~zeilberg/mamarim/mamarimhtml/real.html).

[12] *D. Zeilberger.* Opinion #57, 2003, http://www.math.rutgers.edu/~zeilberg/Opinion57.html.

[13] Category theory, *Wikipedia, the free encyclopedia*, http://en.wikipedia.org/wiki/Category_theory.

[14] Kepler conjecture, *Wikipedia, the free encyclopedia*, http://en.wikipedia.org/wiki/Kepler_conjecture.

[15] Classification of finite simple groups, *Wikipedia, the free encyclopedia*, http://en.wikipedia.org/wiki/Classification_of_finite_simple_groups.

[16] *А. Н. Колмогоров*. Математика, БСЭ, 1938/1954 г.(online copy: http://www.kolmogorov.pms.ru/bse-mathimatic.html).

[17] *А. Н. Колмогоров.* Математика – наука и профессия. *Выпуск 64 серии «Библиотечка квант»*, Москва, Наука, 1988, 288 с., online copy: http://ilib.mccme.ru/djvu/bib-kvant/maths.htm)

[18] *S. Lem.* Summa technologiae, 1967 (русский перевод: http://lib.ru/LEM/summa/).

[19] *S. Lloyd.* Computational capacity of the universe. *Physical Review Letters*, 2002, vol. 88, issue 23, 4 p. (extended online version: http://arxiv.org/abs/quant-ph/0110141).

[20] *С. Ю. Маслов.* Асимметрия познавательных механизмов и ее следствия. *Семиотика и информатика*, вып. 20, АН СССР, ВИНИТИ, Москва, 1983, стр. 3–31 (online copy: http://safety.spbstu.ru/el-book/www.philosophy.ru/library/logic/maslov/01.html).

[21] *С. Ю. Маслов.* Теория дедуктивных систем и ее применения. Радио и связь, Москва, 1986, 133 стр.

[22] Projective plane, *Wikipedia, the free encyclopedia*, http://en.wikipedia.org/wiki/Projective_plane.

[23] *R. Proper*. Graph Theory: The Four Coloring Theorem, 1999, http://www.facstaff.bucknell.edu/udaepp/090/w3/ryanp.htm .

[24] *R. Thomas*. The Four Color Theorem, 1995, http://www.math.gatech.edu/~thomas/FC/fourcolor.html.

[76] [13] Category theory, *Wikipedia, the free encyclopedia*, http://en.wikipedia.org/wiki/Category_theory.

[25] *H. Friedman.* FOM posting, 2003, http://www.cs.nyu.edu/pipermail/fom/2003-October/007525.html.

[26] *Albert Einstein* ueber Kepler. *Frankfurter Zeitung*, 9. November 1930 (online copy: http://www.solidaritaet.com/ibykus/2005/4/iby0504-einstein.pdf, английский перевод: http://www.schillerinstitute.org/fid_02-06/2006/061-2_375_Kepler.html, манускрипт: http://www.alberteinstein.info/db/ViewImage.do?DocumentID=34085&Page=1).

[27] Ф. Энгельс. Переворот в науке, произведенный г. Евгением Дюрингом («Анти-Дюринг»). Лейпциг, 1878 г. См. К. Маркс и Ф. Энгельс. Сочинения, 2 изд., т. 20.

[28] *P. S. Churchland, P. Churchland.* Neural worlds and real worlds. *Nature Reviews Neuroscience,* November 2002, vol. 3, no. 11, pp. 903–907 (online copy: http://philosophy.ucsd.edu/Faculty/neuralWorlds.pdf).

Приложение № 3. Теорема Подниекса

Ниже дано то, что о теореме Подниекса выставлено на его сайте http://www.ltn.lv/~podnieks/ (копировано 2012.01.30):

* * *

About Me

In 1974, during a Soviet army training course, I discovered a simple (almost trivial) extension of Goedel's theorem – my double incompleteness theorem. Since that time, I'm an (amateur?) philosopher of mathematics. My education up to Ph.D. in 1979 was purely mathematical, but I was elected Professor of Information Technologies (second class computer science). However, reading all the funny things about mathematics written even by the most prominent philosophers and mathematicians, I'm feeling at least as their kind of person.

Karlis Podnieks, March 25, 2007

6.2. Double Incompleteness Theorem

Paul Levy discussed the possibility of the double incompleteness phenomenon in 1926:

P.Lévy. Sur le principe du tiers exclu et sur les théoremes non susceptibles de démonstration. "Revue de Métaphysique et de Morale", 1926, vol. 33, N2, pp. 253–258.

He proposed the following conjecture:

"... il est possible que le theoreme de Fermat soit indemontrable, mais on ne demontrera jamais qu'il est indemontrable. Au contraire, il n'est pas absurde d'imaginer qu'on demontre qu'on ne soura jamais si la constante d'Euler est algebrique ou transcendente."

The undecidability of Rosser's formula R_T in theory T could be derived from the consistency conjecture of T. Otherwise, Rosser's judgment remains within PA (first order arithmetic). Hence, the proof of undecidability of R_T can be formalized in the theory PA+Con(T), i.e. in the theory PA plus the consistency conjecture of T. A theory that is used to discuss properties of some other theory is called a **metatheory**. Hence, the undecidability of R_T can be established in the metatheory PA+Con(T). Perhaps, this metatheory can establish also T-undecidability of some other formulas. Still, maybe, there are formulas, whose undecidability cannot be established in PA+Con(T), i.e. the consistency conjecture of T may appear insufficient for this purpose?

The answer can be obtained by modeling the Extended Liar's paradox (see Section 5.1):

q: (q is false) or (q is undecidable).

All the three possible alternatives (q is true, q is false, q is undecidable) lead to contradictions. If theory T is discussed in metatheory M, then we can try to obtain a formula H, which will assert that

"H is refutable in T, or M proves T-undecidability of H".

This can be done, indeed, and as a result, we would obtain the first ("Goedelian") version of the double incompleteness theorem: if theories T, M are both w-consistent, then the formula H is undecidable in T, yet this cannot be established in M (see Podnieks [1975]). Hence the term "double incompleteness theorem". We will prove here the extended ("Rosserian") version of this theorem (Podnieks [1976]).

First, we must define the relationship "M is metatheory for T" precisely. Let T and M be two fundamental theories, i.e. theories containing first order arithmetic PA. Let us denote by Tr_T and Tr_M the translations of PA in T and M respectively (see Section 3.2). Let us say that M **is a metatheory of** T, if we have PA-formulas $PR_T(x)$ and $RF_T(x)$ such that for all PA-formulas F:

a) If T proves $Tr_T(F)$, then M proves $Tr_M(PR_T(\mathbf{F}))$.

b) If T proves Tr_T(~F), then M proves Tr_M(RF_T(**F**)).

Thus, the theory M "knows" something about the arithmetical statements that can be proved or refuted in T. For simplicity of notation let us write simply

T proves F, T proves ~F, M proves PR_T(**F**), M proves RF_T(**F**)

instead of

T proves Tr_T(F), M proves Tr_M(PR_T(**F**)) etc.

Double Incompleteness Theorem. Let T and M be two fundamental theories, and M is a metatheory for T. Then there is a closed PA-formula H such that if T and M are both consistent, then H is undecidable in T, yet M cannot prove neither ~PR_T(**H**), nor ~RF_T(**H**) (i.e. the metatheory M cannot prove neither the T-unprovability, nor the T-unrefutability of the formula H).

Proof. Since the set of all theorems of a formal theory is computably enumerable, let an appropriate Turing machine enumerate all arithmetical theorems of T and M:

(T, A_0), (M, A_1), (T, A_2), (M, A_3), ... -----------(1)

The appearance of the pair (T, A) means that T proves A, the appearance of (M, A) – that M proves A. Our aim is to obtain a formula H such that none of the following four assertions can hold:

T proves H, T proves ~H, M proves ~PR_T(**H**), M proves ~RF_T(**H**). ----------(2)

Therefore, let us call a formula Q **positive**, if in the enumeration (1) one of the pairs (T, Q) or (M. ~RF_T(**Q**)) appears first, and let us call Q **negative**, if first appears (T, ~Q) or (M, ~PR_T(**Q**)). Our target formula H must be neither positive, nor negative. The enumeration index of the first pair appeared we call (respectively) the positive or negative index of the formula Q. The following two predicates are computably solvable:

a(x,y) = " y is the positive index of the formula number x",

b(x,y) = " y is the negative index of the formula number x".

Let formulas A(x,y), B(x, y) express these predicates in PA. Now, following the Rosser's proof method, let us take the formula

Ay (A(x,y) –> Ez<y B(x,z))

and let us apply the self-referential lemma. In this way we obtain a closed PA-formula H such that

PA proves: H <–> Ay (A(**H**, y) –> Ez<y B(**H**,z)),

i.e. H asserts: "if I am positive, then I am negative, and my negative index is less than my positive index".

Exercise 6.2. Following the Rosser's proof (see Section 5.3), derive from either of the assertions (2) a contradiction in T or M.

This completes the proof of the double incompleteness theorem.

If we take M = PA+Con(T), i.e. if we discuss a theory T by means of PA using only the consistency conjecture of T, then there are T-undecidable formulas, whose undecidability cannot be proved by using this conjecture only. To prove the undecidability of these formulas (obtained from the double incompleteness theorem) the conjecture Con(PA+Con(T)) is needed. This is the answer to the question posed at the beginning of this section.

The incompleteness phenomenon allows a new method of developing mathematical theories. If in some theory T we are not able to prove or disprove an assertion F, then we may try to adopt F (or ~F) as an additional axiom. However, this approach is somewhat dangerous: maybe, in the **future** the assertion F will be proved (then our attempt to develop the theory T+~F will cause unwelcome aftereffects) or disproved (then similar aftereffects will cause our attempt to develop T+F). Therefore, it would be nice, before adopting a new axiom F, to obtain some guarantee that this way does not lead to contradictions. I.e. it would be nice to prove the consistency of our intended new theory T+F. From Goedel's second theorem we know that an **absolute** consistency proof is impossible. Such proof must involve assertions from outside of T+F, i.e. assertions that may be even more dangerous than F itself. Hence, we cannot obtain an absolute guarantee. Still, it is possible to obtain a **relative guarantee** – we can try to prove that the adoption of the new axiom F does not generate "new" contradictions (except the "old" ones which – maybe – are already contained in our initial theory T).

The possibility of this approach was realized long before Goedel – at the beginning of the XIX century, when the non-Euclidean geometry was invented. Let us denote: A – the so-called absolute geometry, P – Euclid's fifth postulate. Then A+P is the classical Euclidean geometry. In 1820's J.Bolyai and N.Lobachevsky established that developing the theory A+~P for a long time no contradictions can be obtained. And in 1871 F. Klein proved that

Con(A+P) –> Con(A+~P),

i.e. that we can develop non-Euclidian geometry safely, if the safety of developing A+P (Euclidean geometry) is not questioned. Thus the possibility of developing **alternative** mathematical theories was discovered (or, invented?).

The "normal" way of doing mathematics is deriving consequences from a stable list of axioms. Incompleteness theorems were additional evidence that no stable list of axioms can be sufficient for solving of all problems that can appear in mathematical theories. Since incompleteness is inevitable, one could adopt a more flexible way of doing mathematics: if, doing a theory T we cannot prove the assertion F, let us try to prove that

Con(T) –> Con(T+F),

then, adopt F as an additional axiom, and continue developing T+F (instead of T) safely. Thus, instead of the old **principle of stable axioms** a new **principle of stable safety** could be adopted.

The double incompleteness theorem shows that the principle of stable safety also is incomplete. Really, by taking M = T+Con(T) we obtain from this theorem a formula H that is undecidable in T, yet in M we cannot prove neither ~PR_T(**H**) (i.e. the consistency of T+~H), nor ~RF_T (**H**) (i.e. the consistency of T+H). Thus, neither of the safety conditions

Con(T) –> Con(T+F),

Con(T) –> Con(T+~F)

can be proved within theory T.

From this point of view, for example, the axiom of determinacy (AD) is only a "semi-dangerous" postulate: if ZF is consistent, then

Con(ZF) –> Con(ZF+AD)

cannot be proved in ZF. However, one can prove in PA that

Con(ZF) –> Con(ZF+ ~AD).

Open problem? All the well-known powerful set-theoretic hypotheses H are "semi-dangerous" only (in the above sense), all having the following properties:

a) PA proves: Con(ZFC) –> Con(ZFC+ ~H);

b) Con(ZFC) –> Con(ZFC+H) cannot be proved (sometimes, even in ZFC+H).

Or, the same property with ZF instead of ZFC. Is there some interesting set-theoretical hypothesis H such that neither

Con(ZF) –> Con(ZF+H) (or Con(ZFC+H)),

nor

Con(ZF) –> Con(ZF+ ~H) (or Con(ZFC+ ~H))

can be proved (in PA, in ZF etc.)?

Приложение № 4. Публикации Подниекса

Список публикаций Карлиса Подниекса, скопированный 2012.01.30 с его сайта http://www.ltn.lv/~podnieks/publications.htm:

* * *

Publications by Karlis Podnieks

Papers

1. On cut points of some probabilistic automata. Avtomatika i Vychislitel'naya Tekhnika, 1970, N5, pp. 90–91 (in Russian, English translation: Automatic Control and Computer Sciences).

2. On stability measure of decompositions of stochastic matrices. Avtomatika i Vychislitel'naya Tekhnika, 1971, N4, pp. 91–93 (in Russian, English translation: Automatic Control and Computer Sciences).

3. On stable decompositions of stochastic matrices. In: Problems of Synthesis of Finite Automata, Riga, Zinatne Publishers, 1972, pp. 75–78 (in Russian).

4. On effective decomposition of stochastic matrices. Avtomatika i Vychislitel'naya Tekhnika, 1972, N3, pp. 18–20 (in Russian, English translation: Automatic Control and Computer Sciences).

5. On the reducibility of function classes. In: Equations of Mathematical Physics and Theory of Algorithms, Riga, Latvia State University, 1972, pp. 120–139 (in Russian).

6. (With R.Sranka) Reliability of switching circuits with sufficiently reliable switches. Avtomatika i Vychislitel'naya Tekhnika, 1973, N4, pp. 44–48 (in Russian, English translation: Automatic Control and Computer Sciences).

7. (With J.Barzdins) Towards a theory of inductive inference. Proceedings of 2nd Symposium and Summer School on Mathematical Foundations of Computer Science, Strbske Pleso, High Tatras, Czechoslovakia, September 3–8, 1973, pp. 9–15.

8. Comparing various types of limiting synthesis and prediction of functions. Scientific Proceedings of Latvia State University, 1974, Vol.210, pp. 68–81 (in Russian).

9. (With J.Barzdins, E.Kinber) On speeding up synthesis and prediction of functions. Scientific Proceedings of Latvia State University, 1974, Vol.210, pp. 117–128 (in Russian).

10. (With R.Freivalds) On limit computations by non-deterministic Turing machines. Scientific Proceedings of Latvia State University, 1974, Vol.210, pp. 25–31 (in Russian).

11. Comparing various types of limiting synthesis and prediction of functions. Part II. Scientific Proceedings of Latvia State University, 1975, Vol.233, pp. 35–44 (in Russian).

12. Probabilistic prediction of computable functions. Scientific Proceedings of Latvia State University, 1975, Vol.233, pp. 57–76 (in Russian).

13. The double-incompleteness theorem. Scientific Proceedings of Latvia State University, 1975, Vol.233, pp. 191–200 (in Russian, online copy: HTML)

14. Probabilistic synthesis of enumerated classes of functions. Dokl.Akad.Nauk SSSR, 1975, Vol.223, N5, pp. 1071–1074 (in Russian, English translation: Soviet Math. Dokl., 1975, Vol.16, N4, pp. 1042–1045, online English translation: HTML, PDF).

15. The double-incompleteness theorem. Proceedings of *Fourth All-Union Conference on Mathematical Logic*, 1976, Kishinev, p.118 (in Russian, online copy: HTML, online English translation: HTML).

16. Probabilistic synthesis of programs. In: Theory of Algorithms and Programs, Vol. 3, Latvia State University, 1977, pp. 57–88 (in Russian, online English translation: HTML, PDF).

17. Computational complexity of prediction strategies. In: Theory of Algorithms and Programs, Vol. 3, Latvia State University, 1977, pp. 89–102 (in Russian)

18. Prediction of the next value of a function. Izvestija Vyssh. Uchebn. Zaved. Matematika, 1981, N5, pp. 71–77 (in Russian, available online, PDF).

19. An approach to database design. In: Latvia Archive of algorithms and programs, 1986, 25 pp. (in Russian).

20. Platonism, intuition and the nature of mathematics. Abstracts of: "Heyting'88. Summer School & Conference on Mathematical Logic, Chaika, Bulgaria, September 1988", Sofia, Bulgarian Academy of Sciences, 1988, pp. 50–51 (online copy: HTML).

21. Platonism, intuition and the nature of mathematics. In: Semiotika i informatika, Moscow, VINITI, 1990, Vol. 31, pp. 150–180 (in Russian, online English translation: HTML).

22. (With R.Freivalds, J.Barzdins) Inductive inference of recursive functions: complexity bounds. Lecture Notes in Computer Science, 502, Springer-Verlag, 1991, pp. 111–155 (available online).

23. (With A.Kalnins, J.Barzdins) GRADE V1.0: Modelling and development environment for GRAPES-86 and GRAPES/4GL: Language description. Siemens Nixdorf, Munich, Germany, 1993, 246 pp.

24. (With A.Kalnins, J.Barzdins, I.Etmane et al.) Unified specification language and Integrated CASE tools for information system development. Proceedings of Baltic Workshop on National Infrastructure Databases, May 17–20, 1994, Trakai/Vilnius, Lithuania,Vol. 2, pp. 24–34.

25. (With A.Kalnins, J.Barzdins, I.Etmane et al.) GRADE Windows: an integrated CASE tool for information system development. Proceedings of the 6th International Conference on Software Engineering and Knowledge Engineering (SEKE'94), June 22–24, 1994, Jurmala, Latvia, pp. 54–61.

26. (With A.Kalnins, J.Barzdins). GRADE V2.0 (MS-Windows). Modelling and development environment for GRAPES-86 and GRAPES/4GL: Language description. Part 1. Siemens Nixdorf, Munich, Germany, 1995, 314 pp.

27. (With A.Kalnins, J.Barzdins, I.Etmane). Towards integrated computer aided systems and software engineering tool for information systems design. Proceedings of 2nd International Workshop on Advances in Databases and Information Systems (ADBIS'95), June 27–30, 1995, Moscow, Russia, Workshops in Computing, Springer, 1996, pp. 3–11.

28. (With A.Kalnins, J.Barzdins, A.Auzins,et al.) Business Modeling Language GRAPES-BM and Related CASE Tools. Proceedings of 2nd International Baltic Workshop on Databases and Information Systems, June 12–14, 1996, Tallinn, Estonia, Vol. 2, pp. 3–16 (online copy: HTML).

29. (With U.Sarkans, J.Barzdins, A.Kalnins). Towards a metamodel-based universal graphical editor. Proceedings of 3rd International Baltic Workshop on Databases and Information Systems, April 15-17, 1998, Riga, Latvia, pp. 187–197.

30. (With A.Kalnins, J.Barzdins). MiniGRADE – a tool for conceptual modeling by class diagrams. Proceedings of 18th International Conference on Conceptual Modeling, November, 15-18, 1999, Paris, France, Lecture Notes in Computer Science, Springer, Vol. 1728, 1999, pp. 11–12 (online copy: PDF).

31. (With A.Kalnins, J.Barzdins). Modeling languages and tools: state of the art. Proceedings of the 2nd international conference "Simulation, Gaming, Training and Business Process Reengineering in Operations", Riga, 2000, pp. 211–214 (online copy: PDF).

32. (With A.Kalnins, A.Zarins, E.Celms, J.Barzdins). Editor definition language and its implementation. Proceedings of 4th Andrei Ershov International Conference on Perspectives of System Informatics, July 3–6, 2001, Novosibirsk, Russia, Lecture Notes in Computer Science, Springer, Vol. 2244, 2001, pp. 530–537 (online copy: PDF).

33. (With A.Kalnins, J.Barzdins, E.Celms et al.) The first step towards generic modeling tool. Proceedings of 5th International Baltic Conference on Databases and Information Systems, June 3–6, 2002, Tallinn, Estonia, Vol. 2, pp. 167–180 (online copy: PDF).

34. MDA: correctness of model transformations. Which models are schemas? Selected papers from 6th International Baltic Conference on Databases and Information Systems, June 6–9, 2004, Riga, Latvia, Frontiers in Artificial Intelligence and Applications, IOS Press, Vol. 118, 2005, pp. 185–197 (online copy: PDF).

35. (With J. Barzdins, G. Barzdins, R. Balodis et al.) Towards semantic Latvia. Proceedings of 7th International Baltic Conference on Databases and Information Systems, July 3–6, 2006, Vilnius, Lithuania, pp. 203–218 (online copy: PDF).

36. Indispensability Argument and Set Theory. The Reasoner, Vol. 2, N 11, November 2008, pp. 8–9 (available online).

37. Is Scientific Modeling an Indirect Methodology? The Reasoner, Vol. 3, N 1, January 2009, pp. 4–5 (available online).

38. Towards Model-Based Model of Cognition. The Reasoner, Vol. 3, N 6, June 2009, pp. 5–6 (available online).

39. Goedel's Incompletenesss Theorem. In: Matematika XX veka. Vzglyad iz Peterburga, MCNMO, Moscow, 2010, pp.170–174 (in Russian).

40. (With John Tabak). The Nature of Mathematics – an interview with Professor Karlis Podnieks. In: *John Tabak. Numbers: Computers, Philosophers, and the Search for Meaning.* Revised Edition. Facts on File, 2011, 243 pp. (Afterword, pp.188–197).

41. Frege's Puzzle from a Model-Based Point of View. *The Reasoner*, Vol. 6, N 1, January 2012, pp. 5–6 (available online).

Tutorials

1. Around Goedel's Theorem, 1st edition., Riga, Latvia State University, 1981, 105 pp. (in Russian).

2. Assembly language programming in OS/360. Riga, Latvia State University, 1981, 88 pp. (in Russian).

3. Data base management system IMS: the batch mode. Riga, Latvia State University, 1982, 25 pp. (in Russian).

4. (With M.Auguston, R.Balodis, J.Barzdin et al.) Programming in PL/1 OS/360, 2nd ed. Moscow, Finances and Statistics Publishers, 1984, 327 pp. (in Russian).

5. Platonism, intuition and the nature of mathematics. – Riga, Latvia State University, 1988, 22 pp. (in Russian).

6. Around Goedel's Theorem, 2nd edition., Riga, "Zinatne", 1992, 192 pp. (in Russian, online copy: HTML).

7. Probabilities. Tutorial for Secondary Schools. Riga, 1992 (in Latvian, online copy: HTML).

8. What is Mathematics? Goedel's Theorem and Around. Hyper-textbook for students, 1997–2009 (online book: HTML).

9. (With V.Detlovs) Introduction to Mathematical Logic. Hyper-textbook for students, 2000–2009 (online book: HTML).

10. Logic and Foundations of Mathematics. Goedel's Theorem. Chapter VI in: Symbolic Logic, St.Petersburg State University, St.Petersburg, 2005, pp.180–221 (in Russian).

Приложение № 5. Разные разности

Фотография

Фотография с нескольких сайтов К. Подниекса.[77] Однако на сайтах не сказано, что здесь изображено. Скорее всего, это Подниекс с семьей на каком-то детском утреннике.

Афоризм

На сайте http://fizmati.lv/dzive/folklora/aforismi Физмата Латвийского университета собраны различные изречения преподавателей этого факультета. Карлис Подниекс там представлен следующим изречением:

«Я не сторонник оральной педагогики...»

Что делать?

В конце той, упомянутой в Приложении № 2, переписки 2006 года Подниекс спросил меня: «Но что мне делать, если я в этом убежден?»

Что делать, что делать?..

Теперь уже ничего не поделаешь: «поезд ушел»...

Делать надо было в 1981 году и в ближайших следующих. Что бы ты делал, если бы, скажем, на той же Санкт-Петербургской конференции услышал бы доклад какого-нибудь

[77] Например: http://podnieks.id.lv/po_russki.htm.

известного доктора наук, доклад, который тебе не понятен? Ты бы стал выяснять, что же он имеет в виду: начал задавать бы ему вопросы и т.д. Ты бы задался целью понять его концепцию.

А мне за те более чем 25 лет, которые мы (с перерывами) с тобой контактировали (преимущественно письменно) с 16 февраля 1981 года по 13 сентября 2006 года, – мне ты за эту четверть столетия не задал ни одного вопроса с целью уточнить и понять мою концепцию (хотя я к этому призывал).

Почему такая разница в отношении к тому доктору и ко мне?

Да просто потому, что в отношении того доктора у тебя была бы изначальная установка, что он великий человек и говорит что-то дельное, что тебе надо выяснить и понять.

А в отношении меня у тебя была изначальная установка, что я дурак, и ничего дельного заведомо сказать не могу, и нечего тут уточнять, и нечего понимать, и нечего сравнивать! И эту твою изначальную установку выбить из твоей головы было невозможно никакими аргументами и никакими средствами.

Высокомерие, чванство и надменность в конечном счете определяли твое поведение, а не какие-то научные аргументы и научные воззрения.

Ты преступник против научной этики.

Ты направил историю Веданской теории в русло перманентного отрицания и нескончаемых конфликтов, хотя мог направить в русло добросовестного изучения и конструктивного сотрудничества.

Эти бесконечно длинные десятилетия моего унижения и бессилия перед несправедливостью сделали меня угрюмым, злым и жестоким.

Пей теперь чашу своего позора!

Ты заслужил это.

В.Э.

3 февраля 2012 года